С. А. Логвенков П. А. Мышкис В. С. Самовол

Сборник задач по высшей математике

Учебное пособие для студентов социально-управленческих специальностей

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 512 (075.8)
ББК 22.143
Л69

Авторы:

Логвенков Сергей Алексеевич,
доцент кафедры высшей математики НИУ ВШЭ;
Мышкис Петр Анатольевич,
доцент кафедры высшей математики НИУ ВШЭ;
Самовол Владимир Симхович,
профессор кафедры высшей математики НИУ ВШЭ.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук профессор Белолипецкий А. А.
(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова),
кандидат физико-математических наук доцент Андреева Т. В.
(Московский государственный университет путей сообщения)

Логвенков С. А., Мышкис П. А., Самовол В. С.

Л69 Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для студентов социально-управленческих специальностей. — М.: МЦНМО, 2014. — 176 с.

ISBN 978-5-4439-0282-1

Сборник задач составлен в соответствии с программами курсов по математическому анализу и линейной алгебре для подготовки студентов, обучающихся по специальностям: менеджмент, социология, государственное и муниципальное управление, психология, прикладная политология. Содержит задачи по следующим разделам: элементы векторной алгебры и аналитической геометрии, матрицы и определители, системы линейных уравнений, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, двойные интегралы, простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения.

ББК 22.143

ISBN 978-5-4439-0282-1

Предисловие

Настоящий сборник задач включает разделы математики, которые, как правило, изучаются на первом курсе. Сюда относятся векторная алгебра с элементами аналитической геометрии, линейная алгебра, а также основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных. В сборник также включен раздел, посвященный основным методам решения простейших обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предлагаемый задачник составлен в соответствии с программами таких курсов, как «Алгебра и анализ» и «Математика», читаемых на различных факультетах Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ). Изложение материала ориентировано на углубленное изучение фундаментальных математических идей и методов, широко применяемых в исследованиях социально-экономических процессов и явлений. Целью создания учебника является выработка у студентов четких практических навыков решения базовых задач, традиционно относящихся к курсам алгебры и математического анализа. Помимо стандартных задач в сборник включены задачи, требующие для решения более глубокого понимания теоретического материала. Все разделы задачника снабжены ответами.

При подборе примеров и задач привлекались разнообразные источники и, прежде всего, те книги, которые представлены в приведенном в конце задачника библиографическом списке. Сборник задач может оказаться полезным также и преподавателям при составлении контрольных и экзаменационных работ.

Главы 1, 2 и 9 подготовил С. А. Логвенков. Главы 3, 4 и 6 подготовил В. С. Самовол. Главы 5, 7 и 8 подготовил П. А. Мышкис.

I. Алгебра

Глава 1

Векторная алгебра и начала аналитической геометрии

Справочный материал и примеры решения задач

1. *Расстояние r между точками* $A=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $B=(x_2;\,y_2;\,z_2)$ определяется по формуле

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Соответственно, длина $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляется как расстояние между точками A и B.

Длина $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}=(x;\,y;\,z)$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Кроме того, верна формула:

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|,$$

где λ — любое число. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если выполнено равенство $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

2. *Скалярное произведение* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторов

$$\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)\quad \text{и}\quad \vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$$

определяется следующей формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Соответственно, длина $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}=(x;\,y;\,z)$ может быть вычислена как $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

3. Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторов $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$ может быть определено также следующим образом:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\beta,$$

где β — угол между данными векторами. Эта же формула позволяет вычислять угол между векторами.

4. *Плоскость в трехмерном пространстве* может быть задана уравнением $Ax + By + Cz = D$. Здесь вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ перпендикулярен плоскости и называется вектором нормали. Уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$, с вектором нормали $\vec{n} = (A; B; C)$ может быть написано в следующем виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

5. *Прямая в трехмерном пространстве* может быть задана параметрически и канонически.

Параметрический вид уравнения прямой:

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc.$$

Здесь $(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на прямой, $(a; b; c)$ — направляющий вектор прямой, t — числовой параметр.

Канонический вид уравнения этой же прямой:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

6. *Прямая* может быть также задана *как линия пересечения двух плоскостей*, т. е. как решение системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2. \end{cases}$$

Задача 1. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A = (2; 2; 5)$ и $B = (0; 2; -4)$.

Решение. Направляющим вектором прямой является вектор $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -9)$, следовательно, каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 5}{-9}.$$

Задача 2. Найти точку пересечения E двух прямых, первая из которых проходит через точки $A = (1; -2; 5)$ и $B = (2; 1; 4)$, а вторая — через точки $C = (6; 3; -2)$ и $D = (4; 2; 1)$.

Решение. Составим параметрические уравнения этих прямых. При этом направляющий вектор первой прямой — это вектор $\overrightarrow{AB} = B - A = (1; 3; -1)$, направляющий вектор второй прямой — вектор

$\overrightarrow{CD} = D - C = (-2; -1; 3)$. Тогда уравнения прямых

$$x = 1 + u, \quad y = -2 + 3u, \quad z = 5 - u;$$
$$x = 6 - 2v, \quad y = 3 - v, \quad z = -2 + 3v.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + u = 6 - 2v, \\ -2 + 3u = 3 - v, \\ 5 - u = -2 + 3v. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $u = 1$, $v = 2$. Подставляя полученные значения u и v в уравнения любой из прямых, находим точку их пересечения: $E = (2; 1; 4)$.

Заметим, что если бы полученная система уравнений не имела решения, то это означало бы, что данные прямые не пересекаются, т. е. параллельны или скрещиваются. Чтобы в этом случае определить расположение указанных прямых, целесообразно рассмотреть их направляющие векторы. Если они коллинеарны, то прямые параллельны или совпадают, а если эти векторы не коллинеарны, то прямые скрещиваются.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $A = (1; 1; 1)$, $B = (2; -1; 1)$ и $C = (2; 2; 0)$.

Решение. Найдем вектор нормали $\vec{n} = (a; b; c)$. Этот вектор должен быть перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (1; 1; -1)$, следовательно, скалярное произведение вектора нормали и каждого из этих двух векторов должно равняться нулю. Получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} a - 2b = 0, \\ a + b - c = 0. \end{cases}$$

Решение системы имеет вид $a = 2b$, $c = 3b$. Полагая $b = 1$, получаем вектор нормали $\vec{n} = (2; 1; 3)$. Уравнение плоскости имеет вид

$$2(x - 1) + (y - 1) + 3(z - 1) = 0, \quad \text{или} \quad 2x + y + 3z = 6.$$

Заметим, что вектор нормали определен неоднозначно. Впрочем, и уравнение плоскости определено с точностью до умножения на ненулевое число.

Задача 4. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной прямой $x = 5 + t$, $y = -t$, $z = -1 - 2t$ и проходящей через точку $A = (2; -1; 1)$.

Решение. Вектор нормали плоскости будет совпадать с направляющим вектором данной прямой $\vec{n} = (1; -1; -2)$. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$(x-2)-(y+1)-2(z-1)=0, \quad \text{или} \quad x-y-2z=1.$$

Задача 5. Составить уравнение прямой, являющейся линией пересечения двух заданных плоскостей: $2x+y+z=0$ и $x+2y+z=1$.

Решение. Объединим уравнения в систему. В ходе решения неизвестную y выберем в качестве свободного параметра, а неизвестные x и z выразим через $y=t$. Решая полученную систему уравнений методом исключений (методом Гаусса), получим решение в следующем виде: $x=-1+t$, $y=t$, $z=2-3t$. Полученное решение, очевидно, представляет собой уравнение искомой прямой, записанное в параметрической форме.

Задача 6. Исследовать следующую систему векторов на линейную зависимость и независимость:

$$\vec{a} = (1; -2; -4), \quad \vec{b} = (3; 0; 1), \quad \vec{c} = (4; -2; 1).$$

Решение. Система из трех векторов в трехмерном пространстве зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из этих векторов (взятых в качестве строк или столбцов матрицы) равен нулю.

Вычисляя определитель указанной матрицы, получаем, что он равен 24. Следовательно, система векторов линейно независима.

Задача 7. Найти ранг системы векторов

$$\vec{a} = (2; -1; -3), \quad \vec{b} = (1; 0; 1), \quad \vec{c} = (-1; 1; 3), \quad \vec{d} = (1; 1; 4).$$

Указать какой-нибудь базис в этой системе векторов. Векторы, не входящие в базис, разложить по базису.

Решение. Составим матрицу из данных векторов, взятых в качестве ее строк, и будем приводить эту матрицу методом Гаусса к треугольному (ступенчатому) виду. Предварительно для удобства расчетов поменяем порядок строк в матрице. Сбоку от каждой строки будем указывать соответствующий ей вектор (эти записи называем ниже комментарием):

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} b \\ a \\ c \\ d \end{array} \end{array}$$

Умножая первую строку на нужные коэффициенты и прибавляя ее к другим строкам, добиваемся нулей в первом столбце под первым элементом главной диагонали. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ c+b \\ d-b \end{matrix}$$

Аналогичным способом с помощью второй строки получаем нули во втором столбце под вторым элементом главной диагонали. Новая матрица приобретает следующий вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ (c+b)+(a-2b)=a-b+c \\ (d-b)+(a-2b)=d+a-3b \end{matrix}$$

В комментарии расшифрованы проведенные преобразования.

В последнем преобразовании добиваемся нуля в последней строке третьего столбца (под третьим элементом главной диагонали).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ a-b+c \\ (d+a-3b)-2(a-b+c)=d-a-b-2c \end{matrix}$$

Матрица приведена к требуемому виду, что свидетельствует об окончании вычислений. Первые три строки преобразованной матрицы имеют треугольный вид, что говорит о линейной независимости соответствующих векторов-строк. Эти векторы представляют собой линейные комбинации векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Это позволяет сделать вывод о том, что ранг исходной системы векторов равен трем, а векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ являются ее базисом. Осталось выразить вектор $\vec{d}$ через векторы базиса. Для этого заметим, что последняя строка матрицы нулевая. Следовательно, согласно комментарию, имеем $\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}=0$, откуда $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$. Задача решена полностью.

§ 1. Операции над векторами

1.1. Даны точки $M_1(4; -2; 6)$, $M_2(1; 4; 0)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

1.2. Известно, что $\overrightarrow{AB}=(4; -12; z)$, причем $|\overrightarrow{AB}|=13$. Найдите z.

1.3. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями Ox и Oy углы 60° и 120°. Найдите его координаты и сделайте рисунок, если $|\vec{a}|=2$.

1.4. Найдите вектор $\vec{a}$, образующий с тремя базисными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ равные острые углы, при условии, что $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$.

1.5. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$$A(3;\,-4;\,7),\quad B(-5;\,3;\,-2),\quad C(1;\,2;\,-3).$$

Найдите его четвертую вершину D.

1.6. Даны вершины треугольника

$$A(3;\,-1;\,5),\quad B(4;\,2;\,-5),\quad C(-4;\,0;\,3).$$

Найдите длину медианы, проведенной из вершины A.

1.7. Постройте параллелограмм на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{k}-3\vec{j}$. Определите длины его диагоналей.

1.8. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если векторы $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+6\vec{j}-n\vec{k}$ коллинеарны.

1.9. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если векторы $\vec{a}=(x;\,-2;\,8)$ и $\vec{b}=(1;\,y;\,-4)$ коллинеарны.

1.10. Найдите все точки B, для которых векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{c}(1;\,2;\,3)$ коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}|=2|\vec{c}|$, если задана точка $A(3;\,2;\,1)$.

1.11. Определите длины сторон параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{d}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$.

1.12. Даны векторы $\vec{a}=(4;\,-2;\,4)$ и $\vec{b}=(6;\,-3;\,2)$. Найдите
а) $(\vec{a}+\vec{b})^2$, **б)** $(\vec{a}-\vec{b})^2$, **в)** $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

1.13. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по трём заданным точкам:
а) $A(1;\,2;\,-3;\,4)$, $B(3;\,4;\,-2;\,0)$, $C(2;\,4;\,-3;\,6)$;
б) $A(2;\,-2;\,-4;\,1)$, $B(4;\,2;\,-5;\,3)$, $C(2;\,0;\,-3;\,3)$;
в) $A(3;\,-1;\,5;\,2)$, $B(7;\,1;\,3;\,3)$, $C(5;\,-1;\,7;\,3)$.

1.14. Найдите вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(2;\,1;\,-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$.

1.15. Вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(3;\,-4;\,-12)$, образует с осью Ox тупой угол. Зная, что $|\vec{b}|=26$, найдите его координаты.

1.16. Вычислите
а) $(\vec{m}+\vec{n})^2$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы с углом 30° между ними;

б) $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $|\vec{a}|=\sqrt{8}$, $|\vec{b}|=4$ и угол между этими векторами составляет $135°$.

1.17. Даны длины векторов $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Найдите $|\vec{a}-\vec{b}|$.

1.18. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60°$, причем $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=8$. Найдите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

1.19. Найдите косинус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если заданы три его вершины $A(2;1;3)$, $B(5;2;-1)$, $C(-3;3;-3)$.

1.20. Параллелограмм построен на векторах $\overrightarrow{AB}=(2{,}5;1;2{,}5)$ и $\overrightarrow{AD}=(0{,}5;-1;1{,}5)$. Найдите угол между его диагоналями.

1.21. Векторы $\overrightarrow{AC}=(1;-1;6)$ и $\overrightarrow{BD}=(-1;-5;2)$ являются диагоналями параллелограмма. Найдите угол между его сторонами AB и AD.

1.22. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные векторы, образующие угол $120°$. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1.23. Найдите угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

1.24. Найдите длину проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:
а) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$;
б) $\vec{a}=(-2;3;-1;4)$, $\vec{b}=(1;0;2;2)$.

1.25. Найдите косинус угла между вектором $\vec{a}(3;-4;5)$ и вектором $\vec{b}$ — проекцией вектора $\vec{a}$ на координатную плоскость xOy.

1.26. Даны два вектора $\vec{a}=(m;3;4)$ и $\vec{b}=(4;m;-7)$. При каких значениях параметра m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут перпендикулярны?

1.27. При каком значении параметра m векторы $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ перпендикулярны?

1.28. При каком значении параметра m угол между векторами $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{k}$ равен $180°$?

1.29. Найдите $\cos(\widehat{\vec{b},\vec{c}})$, если
а) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-7$ и $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$;
б) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ и $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$.

1.30. Найдите $\vec{a}\cdot\vec{c}$, если
а) $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=1$, $\cos(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=\frac{5}{6}$ и $\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}$;
б) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $\cos(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=\frac{3}{10}$ и $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$.

1.31. Найдите величину параметра $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ:

а) $\vec{a}(5\cos\alpha; 2\sin\alpha; 5\sin\alpha; 2\cos\alpha)$, $\vec{b}(0; 2; 5; 0)$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$;

б) $\vec{a}(3\sin\alpha; -5\cos\alpha; 3\cos\alpha; 5\sin\alpha)$, $\vec{b}(3; 0; 0; 5)$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

1.32. Найдите величину параметра $\alpha \in [0; \pi]$, если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ:

а) $\vec{a}(3\cos\alpha; -5\sin\alpha; 3\sin\alpha; 5\cos\alpha)$, $\vec{b}(3; 0; 0; 5)$ $\varphi = \frac{\pi}{7}$;

б) $\vec{a}(-3\cos\alpha; 5\sin\alpha; -3\sin\alpha; 5\cos\alpha)$, $\vec{b}(3; 0; 0; -5)$, $\varphi = \frac{\pi}{7}$.

1.33. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Известны длины векторов $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$. Определите косинус угла между векторами $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

1.34. Найдите $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, если:

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 6$;

б) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot \vec{b} = -10$;

в) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ и $\vec{a} \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 10$;

г) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ и $(5\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 47$.

§ 2. Прямые и плоскости в пространстве

Элементы аналитической геометрии

2.1. Пусть $M_1(-1; -3; -7)$ и $M_2(-4; -1; -5)$. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -4; -2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2.2. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(0; 1; 3)$ и $M_2(2; 4; 5)$.

2.3. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3; 1; 0)$ и $M_2(1; 3; 0)$.

2.4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(2; -4; 3)$.

2.5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(0; 5; 6)$.

2.6. Составьте уравнение плоскости, отсекающей равные отрезки на осях координат и проходящей через точку $M(5; 4; 3)$.

2.7. Составьте уравнение плоскости, отсекающей на осях Oy и Oz вдвое большие отрезки, чем на оси Ox, и проходящей через точку $M(2; -3; 3)$.

2.8. Напишите уравнение плоскости, параллельной плоскости $5x-3y+2z-10=0$ и проходящей через точку $M(2; 3; -1)$.

2.9. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(14; 2; 2)$ параллельно плоскости $x-2y-3z=0$.

2.10. Найдите угол между плоскостями:
а) $x+2y-2z-8=0$ и $x+y-17=0$;
б) $x-y+z\sqrt{2}-6=0$ и $x+y-z\sqrt{2}+12=0$.

2.11. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно плоскостям:
а) $x-2y+z-13=0, \quad x+2y-2z+2=0, \quad M(-1; -1; 2)$;
б) $3x-2y+2z-6=0, \quad 5x-4y+3z+3=0, \quad M(3; -1; -5)$.

2.12. Напишите уравнение прямой (в каноническом параметрическом виде), проходящей через точки $M_1(-1; 2; 3)$ и $M_2(2; 6; -2)$.

2.13. Напишите в каноническом и параметрическом виде уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей

$$x+y-z-2=0 \quad \text{и} \quad 2x-y+z-7=0.$$

2.14. Прямые l_1 и l_2 являются линиями пересечения двух пар плоскостей. Определите, пересекаются ли эти прямые.

а) $l_1: \begin{cases} 2x+y-z-2=0, \\ x-y+2z-2=0 \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x+3y-z-2=0, \\ x+2y-2=0; \end{cases}$

б) $l_1: \begin{cases} 3x+3y+z+1=0, \\ x+2y+z+1=0 \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x+y+3z-5=0, \\ x+2y+4z-5=0. \end{cases}$

2.15. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(3; -5; 2)$ на ось Ox.

2.16. Найдите угол между прямой
а) $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ и прямой $x=2t-1$, $y=2t+3$, $z=2$;
б) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{\sqrt{2}}$ и плоскостью $x+y+z\sqrt{2}=0$.

2.17 Найдите косинус угла между двумя лучами.

а) $l_1: \begin{cases} x=3+3t, \\ y=-2-t, \\ z=1+2t, \\ t\in[0; +\infty), \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x=3+k, \\ y=-2+3k, \\ z=1-k, \\ k\in(-\infty; 0]; \end{cases}$

б) $l_1: \begin{cases} x=2-t, \\ y=3-t, \\ z=-2+4t, \\ t\in[0;+\infty), \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x=2+2k, \\ y=3+k, \\ z=-2+2k, \\ k\in(-\infty;0]. \end{cases}$

2.18 Найдите длину отрезка

а) $\begin{cases} x=-2{,}5+2t, \\ y=3{,}1+2t, \\ z=-1{,}1+t, \\ t\in[-1;1]; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x=5, \\ y=-2{,}3+5t, \\ z=5+12t, \\ t\in[-2;-1]. \end{cases}$

2.19. При каком значении параметра a прямая l и плоскость α перпендикулярны:

а) $l\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$, $\alpha\colon 2x+(a+2)y-2z+11=0$;

б) $l\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{8}=\dfrac{z}{6}$, $\alpha\colon x+(a+1)y+3z+5=0$?

2.20. Найдите точку пересечения прямой l и плоскости α:

а) $l\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2}$, $\alpha\colon x-3y+z-8=0$;

б) $l\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{0}$, $\alpha\colon 3x+y-2z=0$.

2.21. Найдите точку пересечения прямой, проходящей через точки $(1;1;1)$ и $(1;2;3)$, и плоскости $x-y-3z-11=0$.

2.22. При каком значении параметра a плоскость $x+y+az-4=0$ и прямая $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ пересекаются (параллельны)?

2.23. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-4)$ и перпендикулярной прямой $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

2.24. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$$

и точку $M(3;4;5)$.

2.25. Найдите координаты проекции точки P на плоскость α:

а) $P(-1;2;0)$, $\alpha\colon 4x-5y-z-7=0$;

б) $P(2;-1;1)$, $\alpha\colon x-y+2z-2=0$.

2.26. Найдите расстояние от плоскости $5x+2y-z-10=0$ до точки $M(0;-5;10)$.

2.27. Найдите проекцию точки M на прямую l:

а) $M(2;3;4)$, $\quad l\colon x=y=z$;

б) $M(0;2;1)$, $\quad l\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

2.28. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1;0;-1)$ на прямую $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

2.29. Найдите точку пересечения прямых:

а) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$ и $\dfrac{x+6}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+1}{2}$;

б) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ и $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-6}{5}=\dfrac{z-2}{1}$.

2.30. Напишите уравнение плоскости, относительно которой точки P_1 и P_2 симметричны:

а) $P_1(1;-2;-3)$ и $P_2(3;4;9)$;

б) $P_1(-2;1;-3)$ и $P_2(6;5;5)$.

2.31. Найдите точку, симметричную точке P относительно плоскости α:

а) $P(0;-1;3)$, $\alpha\colon 2x+y-2z-2=0$;

б) $P(2;1;-1)$, $\alpha\colon 2x-y+z-8=0$.

2.32. Найдите время t, необходимое для перехода объекта, движущегося со скоростью $\vec{v}(2;0;1)$, из точки $A(0;2;1)$ в точку $B(4;2;3)$.

2.33. Объект, двигаясь по плоскости последовательно со скоростями $\vec{v}_1(1;-2)$ и $\vec{v}_2(2;3)$, попадает из точки $A(-1;3)$ в точку $B(7;1)$. Найдите соответствующие моменты времени t_1 и t_2, а также точку B_{12} смены скоростей $\vec{v}_1$ на $\vec{v}_2$.

2.34. Объект, двигаясь последовательно со скоростями $\vec{v}_1(1;0;-1)$, $\vec{v}_2(-1;1;3)$ и $\vec{v}_3(-1;-1;1)$, попадает из точки $A(2;3;-2)$ в точку $B(1;2;3)$. Найдите соответствующие моменты времени t_1, t_2 и t_3, а также точки B_{12} и B_{23} смены скоростей $\vec{v}_1$ на $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_2$ на $\vec{v}_3$.

2.35. Найдите каноническое уравнение прямой, полученной отражением прямой

$$\begin{cases} x=2-5t,\\ y=3+t,\\ z=-2-2t \end{cases}$$

относительно координатной плоскости yOz.

2.36. Найдите параметрическое уравнение прямой, полученной отражением прямой $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{3}$ относительно координатной оси Oz.

2.37. Найдите уравнение плоскости, полученной отражением плоскости α относительно:

а) координатной оси Oz, $\quad \alpha\colon 2(x-3)-3(y-1)+4(z+3)=0$;

б) координатной оси Ox, $\quad \alpha\colon 3(x+1)-2(y-3)-4(z+2)=0$.

2.38. На прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z+1}{-5}$ взяты две точки A и B на расстоянии $\sqrt{104}$ друг от друга. На каком расстоянии друг от друга лежат их проекции A' и B' на ось Oz?

2.39. Найдите расстояние от сферы

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$$

до

а) точки $A(3; 6; 1)$;

б) сферы $(x-3)^2+(y-6)^2+(z-1)^2=1$.

2.40. Найдите расстояние от сферы

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=64$$

до сферы $(x-3)^2+(y-6)^2+(z-1)^2=1$.

2.41. Найдите точку A касания сферы

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$$

и сферы:

а) $(x-3)^2+(y-6)^2+(z-1)^2=9$;

б) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=36$.

2.42. Найдите расстояние от сферы

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$$

до плоскости $x-2y+2z-6=0$.

2.43. При каких значениях параметра D плоскость

$$x-2y+2z+D=0$$

касается сферы

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25?$$

2.44. Найдите радиус r окружности, по которой сфера
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$$
пересекается с плоскостью $x-2y+2z-3=0$.

2.45. Дан бесконечный конус с вершиной $A(1;2;3)$, осью
$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2+t, \qquad t\in[0+\infty), \\ z=3-2t; \end{cases}$$
и углом при вершине 2α таким, что $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$. Найдите

а) уравнение поверхности (боковой) этого конуса;

б) условие на координаты точек его внутренней части.

§ 3. Линейные векторные пространства

3.1. Разложите вектор $\vec{x}(4;3;-2)$ по векторам
$$\vec{e}_1(1;1;2), \quad \vec{e}_2(-3;0;-2), \quad \vec{e}_3(1;2;-1).$$

3.2. Найдите координаты вектора $\vec{x}(2,2,-1)$ в базисе
$$\vec{e}_1(1;0;2), \quad \vec{e}_2(-1;2;1), \quad \vec{e}_3(-1;4;0).$$

3.3. Разложите вектор $\vec{x}(2;2;3;3)$ по системе векторов
$$\vec{a}(1;2;3;1), \quad \vec{b}(2;1;2;3), \quad \vec{c}(3;2;4;4).$$

3.4. Разложите вектор $\vec{x}(4;1;3;1)$ по системе векторов
$$\vec{a}(2;0;1;1), \quad \vec{b}(1;1;2;-2), \quad \vec{c}(2;1;3;-3).$$

3.5. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, и с нулевым свободным членом найдите какой-нибудь базис. Найдите в этом базисе разложение многочлена $T(x)=x^2-3x$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в выбранном базисе.

3.6. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, и с корнем $x=1$ найдите какой-нибудь базис. Найдите в этом базисе разложение многочлена $T(x)=x^2-3x+2$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в выбранном базисе.

3.7. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, найдите разложение многочлена $T(x)$ по базису $P(x)$,

$Q(x)$, $R(x)$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в данном базисе.

а) $T(x)=3x^2+2x+1$, $P(x)=4x^2+3x+4$, $Q(x)=3x^2+2x+3$, $R(x)=x^2+x+2$;

б) $T(x)=9x^2+10x+4$, $P(x)=3x^2+2x+3$, $Q(x)=x^2+x+1$, $R(x)=3x^2+3x+2$.

3.8. Найдите какой-нибудь базис в указанном линейном пространстве L. Найдите координаты элемента $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ в этом базисе. В ответе укажите координаты A в выбранном базисе.

а) L — линейное пространство всех матриц 2×2;

б) L — линейное пространство симметричных матриц 2×2;

в) L — линейное пространство матриц 2×2 вида $\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

3.9. В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

а) $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 8 & 2\end{pmatrix}$ в базисе $e_1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ в базисе $e_1=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}9 & 10\\ 10 & 4\end{pmatrix}$ в базисе $e_1=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

3.10. Исследуйте систему векторов на линейную зависимость или независимость:

а) $\vec{a}_1=(-7;5;19)$, $\vec{a}_2=(-5;7;-7)$, $\vec{a}_3=(-8;7;14)$;

б) $\vec{a}_1=(1;2;-2)$, $\vec{a}_2=(0;-1;4)$, $\vec{a}_3=(2;-3;3)$;

в) $\vec{a}_1=(1;8;-1)$, $\vec{a}_2=(-2;3;3)$, $\vec{a}_3=(4;-11;9)$;

г) $\vec{a}_1=(1;2;3)$, $\vec{a}_2=(2;-1;1)$, $\vec{a}_3=(1;3;4)$;

д) $\vec{a}_1=(0;1;1;0)$, $\vec{a}_2=(1;1;3;1)$, $\vec{a}_3=(1;3;5;1)$, $\vec{a}_4=(0;1;1;-2)$;

е) $\vec{a}_1=(-1;7;1;-2)$, $\vec{a}_2=(2;3;2;1)$, $\vec{a}_3=(4;4;4;-3)$, $\vec{a}_4=(1;6;-1;1)$.

3.11. Найдите ранг системы векторов и укажите какой-нибудь базис в этой системе векторов. Векторы, не входящие в базис, разложите по базису:

а) $\vec{a}_1=(1;1;2)$, $\vec{a}_2=(3;1;2)$, $\vec{a}_3=(1;2;1)$, $\vec{a}_4=(2;1;2)$;

б) $\vec{a}_1=(1;1;1)$, $\vec{a}_2=(-3;-5;5)$, $\vec{a}_3=(3;4;-1)$, $\vec{a}_4=(1;-1;4)$;

в) $\vec{a}_1=(1;1;0;-1)$, $\vec{a}_2=(1;2;1;0)$, $\vec{a}_3=(1;3;2;1)$, $\vec{a}_4=(1;4;3;2)$;

г) $\vec{a}_1=(1;0;1;0)$, $\vec{a}_2=(-2;1;3;-7)$, $\vec{a}_3=(3;-1;0;3)$, $\vec{a}_4=(-4;1;-3;1)$;

д) $\vec{a}_1=(1;1;4;2)$, $\vec{a}_2=(1;-1;-2;4)$, $\vec{a}_3=(0;2;6;-2)$, $\vec{a}_4=(-3;3;3;-12)$, $\vec{a}_5=(-1;0;-4;-3)$;

е) $\vec{a}_1=(1;3;0;5)$, $\vec{a}_2=(1;2;0;4)$, $\vec{a}_3=(1;1;1;3)$, $\vec{a}_4=(1;0;-1;2)$, $\vec{a}_5=(1;-3;3;-1)$.

3.12. При каких значениях параметра a система векторов является линейно зависимой:

а) $\vec{a}_1=(1;2;-1;1)$, $\vec{a}_2=(2;5;0;1)$, $\vec{a}_3=(-1;0;5;a)$;

б) $\vec{a}_1=(1;0;2;-3)$, $\vec{a}_2=(2;2;-4;a)$, $\vec{a}_3=(3;1;2;-5)$?

3.13. При каких значениях параметра a система векторов является линейно независимой:

а) $\vec{a}_1=(2;1;a;2)$, $\vec{a}_2=(1;2;3;1)$, $\vec{a}_3=(1;-1;2;1)$;

б) $\vec{a}_1=(-1;2;-2;1)$, $\vec{a}_2=(2;4;4;a)$, $\vec{a}_3=(1;0;2;0)$?

Ответы к главе 1

§ 1

1.1. 9.

1.2. ± 3.

1.3. $\vec{a} = (1; -1; \pm\sqrt{2})$.

1.4. $\vec{a} = \pm(2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$.

1.5. $D(9; -5; 6)$. **1.6.** 7.

1.7. 3, $\sqrt{21}$. **1.8.** $\sqrt{17}$.

1.9. $\sqrt{72}$, $x = -2$, $y = 1$.

1.10. $B_1(5; 6; 7)$, $B_2(1; -2; -5)$.

1.11. $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{42}}{2}$.

1.12. **а)** 161; **б)** 9; **в)** -184.

1.13. **а)** $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1; -4)$ и $\overrightarrow{AC} = (1; 2; 0; 2)$, $\cos A = -\dfrac{2}{15}$;

б) $\overrightarrow{AB} = (2; 4; -1; 2)$ и $\overrightarrow{AC} = (0; 2; 1; 2)$, $\cos A = \dfrac{11}{15}$;

в) $\overrightarrow{AB} = (4; 2; -2; 1)$ и $\overrightarrow{AC} = (2; 0; 2; 1)$, $\cos A = \dfrac{1}{3}$.

1.14. $(1; 0{,}5; -0{,}5)$.

1.15. $(-6; 8; 24)$.

1.16. **а)** $2 + \sqrt{3}$; **б)** 40.

1.17. 22. **1.18.** $\sqrt{97}$ и 7.

1.19. $\cos\varphi = \dfrac{43}{25\sqrt{13}}$. **1.20.** $\vec{d}_1 = (3; 0; 4)$ и $\vec{d}_2 = (2; 2; 1)$, $\cos A = \dfrac{2}{3}$.

1.21. $\vec{d}_1 = (0; -3; 4)$ и $\vec{d}_2 = (1; 2; 2)$, $\cos A = \dfrac{2}{15}$. **1.22.** 120°. **1.23.** 60°.

1.24. **а)** $\dfrac{8}{\sqrt{18}}$; **б)** $\dfrac{4}{3}$.

1.25. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **1.26.** 4.

1.27. -6. **1.28.** -2.

1.29. **а)** $\dfrac{11}{5\sqrt{13}}$; **б)** $\dfrac{8}{\sqrt{69}}$.

1.30. **а)** 21; **б)** 19.

1.31. **а)** $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$; **б)** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

1.32. **а)** $\cos\alpha = \cos\dfrac{\pi}{7}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$; **б)** $\cos\alpha = -\cos\dfrac{\pi}{7}$, $\alpha = \dfrac{6\pi}{7}$.

1.33. $c^2 = 3 + 9 + 9 = 21$, $d^2 = 1$, $cd = 3 + 3 - 3 = 3$, $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{21}}$.

1.34. **а)** $-\dfrac{1}{3}$; **б)** $\dfrac{3}{5}$; **в)** $\dfrac{1}{4}$; **г)** $-\dfrac{1}{6}$.

§ 2

2.1. $3x - 2y - 2z - 18 = 0$.

2.2. $2y - 3z + 7 = 0$.

2.3. $x + y - 4 = 0$.

2.4. $2x + y = 0$.

2.5. $6y - 5z = 0$.

2.6. $x + y + z - 12 = 0$, $x - y - z + 2 = 0$, $x + y - z - 6 = 0$, $x - y + z - 4 = 0$.

2.7. $2x + y + z - 4 = 0$.

2.8. $5x - 3y + 2z + 1 = 0$.

2.9. $x - 2y - 3z - 4 = 0$.

2.10. **а)** $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; **б)** $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

2.11. **а)** $2x + 3y + 4z - 3 = 0$; **б)** $2x + y - 2z - 15 = 0$.

2.12. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z+2}{-5}$.

2.13. $\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$; $x=3$, $y=-1+t$, $z=t$.
2.14. **а)** Нет; **б)** да, в точке $(1;-2;2)$.
2.15. $\frac{x-3}{0}=\frac{y}{5}=\frac{z}{-2}$.
2.16. **а)** $\varphi=\frac{\pi}{3}$; **б)** $\varphi=\frac{\pi}{6}$.
2.17. **а)** $\frac{2}{\sqrt{154}}$; **б)** $-\frac{-5}{9\sqrt{2}}$.
2.18. **а)** 6; **б)** 13.
2.19. **а)** $a=4$; **б)** $a=3$.
2.20. **а)** $(2;-1;3)$; **б)** $(1;1;2)$.
2.21. $(1;-1;-3)$.
2.22. При $a\neq-1$ пересекаются, при $a=-1$ параллельны.
2.23. $y+z+1=0$.
2.24. $x-2y+z=0$.
2.25. **а)** $(1;-0{,}5;-0{,}5)$; **б)** $(1{,}5;-0{,}5;0)$.
2.26. $\sqrt{30}$.
2.27. **а)** $(3;3;3)$; **б)** $(2;0;-1)$.
2.28. $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{-1}$.
2.29. **а)** $(-5;6;1)$; **б)** $(3;1;1)$.
2.30. **а)** $x+3y+6z-23=0$; **б)** $2x+y+2z-9=0$.
2.31. **а)** $(4;1;-1)$; **б)** $(6;-1;1)$.
2.32. $t=2$.
2.33. $t_1=4$; $t_2=2$; $B_{12}(3;-5)$.
2.34. $t_1=4$; $t_2=2$; $t_3=3$; $B_{12}(6;3;-6)$; $B_{23}(4;5;0)$.
2.35. $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-2}$.
2.36. $x=-3-4t$, $y=2+2t$, $z=1+3t$.
2.37. **а)** $2x+3y+4z+9=0$; **б)** $3x+2y+4z+1=0$.
2.38. 10.
2.39. **а)** 2; **б)** 1.
2.40. 1.
2.41. **а)** $A(2;4;-1)$; **б)** $A(2;0;-1)$.
2.42. 2.
2.43. -6, 24.
2.44. $r=3$.
2.45. **а)** $2(x-1)+(y-2)-2(z-3)=2\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$;
б) $2(x-1)+(y-2)-2(z-3)>2\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$.

§ 3

3.1. $\vec{x}=-\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$.
3.2. $(1;-3;2)$.
3.3. $\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.
3.4. $\vec{x}=2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$.
3.5. В качестве базиса можно взять $e_1=x^2$, $e_2=x$.
В этом базисе $T(x)=(1;-3)$.
3.6. В качестве базиса можно взять $e_1=(x-1)^2$, $e_2=x-1$.
В этом базисе $T(x)=(1;-1)$.
3.7. **а)** $(2;-1;-2)$; **б)** $(-1;-3;5)$.
3.8. **а)** В качестве базиса можно взять $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,
$e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. В этом базисе $A=(0;2;2;3)$.
б) В качестве базиса можно взять $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.
В этом базисе $A=(0;2;3)$.

в) В качестве базиса можно взять $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
В этом базисе $A = (2; 2; 3)$.
3.9. **а)** $(2; 2; -4)$; **б)** $(2; -1; -2)$; **в)** $(-1; -3; 5)$.
3.10. **а)** Линейно зависима; **б)** линейно независима;
в) линейно независима; **г)** линейно зависима;
д) линейно зависима; **е)** линейно независима.
3.11. **а)** Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.
В этом базисе $\vec{a}_4 = (0{,}5; 0{,}5; 0)$.
б) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.
В этом базисе $\vec{a}_4 = (7{,}75; -0{,}25; -2{,}5)$.
в) Ранг 2, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.
В этом базисе $\vec{a}_3 = (-1; 2)$, $\vec{a}_4 = (-2; 3)$.
г) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.
В этом базисе $\vec{a}_4 = (0; -1; -2)$.
д) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_5$.
В этом базисе $\vec{a}_2 = (1; -1; 0)$, $\vec{a}_4 = (-2; 2{,}5; 1)$.
е) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.
В этом базисе $\vec{a}_4 = (-3; 5; -1)$, $\vec{a}_5 = (-2; 0; 3)$.
3.12. **а)** $a = -3$; **б)** $a = 2$. **3.13.** **а)** $a \neq 5$; **б)** $a \neq 2$.

Глава 2

Матрицы и определители матриц. Системы линейных уравнений

Справочный материал и примеры решения задач

1. Вычислить определитель матрицы A путем разложения его по элементам какого-либо столбца (строки):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Будем раскладывать определитель матрицы по элементам первого столбца с учетом наличия в этом столбце нулевого элемента (чем больше нулевых элементов, тем меньше объем вычислений). *Определитель матрицы вычисляется по формуле*

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

Здесь a_{i1} — элементы первого столбца, а A_{i1} — их алгебраические дополнения $(i = 1, 2, 3)$. *Алгебраические дополнения* вычисляются по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

где M_{ij} — соответствующие миноры. *Минором* M_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j. Вычисляем нужные нам алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

Отсюда $\det A = A_{11} - 2A_{31} = -10$.

2. Вычислить матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Для вычисления матрицы, обратной матрице второго порядка, существует следующая формула.

Если $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\det A = ad-bc \neq 0$, то $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Отсюда получаем для данной матрицы:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что правильность решения легко проверить, убедившись, что $AA^{-1}=E$, где E — единичная матрица.

3. Вычислить матрицу A^{-1}, обратную матрице A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Эту задачу можно решать двумя способами: методом присоединенной матрицы, основанным на вычислении алгебраических дополнений, и методом элементарных преобразований. Продемонстрируем оба метода.

Способ 1. Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и ее определитель:

$$\begin{aligned} &A_{11} = 4, && A_{12} = -7, && A_{13} = -6, \\ &A_{21} = -8, && A_{22} = 9, && A_{23} = 10, \\ &A_{31} = 4, && A_{32} = -5, && A_{33} = -6, \end{aligned}$$
$$\det A = a_{21}\cdot A_{21} + 0 + a_{23}\cdot A_{23} = -4.$$

Составим присоединенную матрицу B, элементами которой являются алгебраические дополнения матрицы A:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу для обратной матрицы $A^{-1}=\frac{1}{\det A}B^{\mathrm{T}}$, получим

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Способ 2. Используем теперь метод элементарных преобразований. Построим матрицу, полученную дописыванием справа от матрицы A единичной матрицы:

$$B = (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

С помощью метода Гаусса приведем матрицу, составленную из первых трех строк и столбцов, к единичной матрице. При этом преобразования над ее строками будем производить над строками всей матрицы B. Справа от матрицы указано, какие элементарные преобразования будут выполнены со строками на этом шаге. Римские цифры обозначают номера строк.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-4\text{I}]{\text{II}-3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\frac{5}{3}\text{II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right).$$

Далее получим нули над главной диагональю:

$$\xrightarrow{\text{II}-\frac{5}{2}\text{III}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot\text{II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -21 & 27 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-\frac{1}{2}\text{III}}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 2{,}5 & -2{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & -12 & 0 & -21 & 27 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}+\frac{1}{6}\text{II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 0 & -21 & 27 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{III}]{-\frac{1}{12}\text{II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

В правой части полученной матрицы мы видим матрицу, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. Решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2, \\ 4x_1+x_3-7x_4=3, \\ 2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$$

Ответ записать в векторной форме.

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы уравнений и с помощью элементарных преобразований (методом Гаусса) приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Попутно мы выяснили, что ранги основной и расширенной матриц системы совпадают (равны двум). Это свидетельствует о совместности системы. Из вида полученной матрицы следует, что неизвестные x_1 и x_2 можно выбрать в качестве базисных. В качестве базисных неизвестных рекомендуется брать неизвестные, соответствующие первым отличным от нуля элементам соответствующей строки матрицы, приведенной к треугольному виду. Оставшиеся неизвестные x_3 и x_4 берем в качестве свободных. Из второго уравнения выразим x_2 через свободные неизвестные x_3 и x_4. Получим $x_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4$. Подставляя это выражение в первое уравнение и приводя подобные члены, находим $x_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4$. Полагая $x_3=C_1$, $x_4=C_2$, получаем

$$x_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}C_1+\frac{7}{4}C_2, \quad x_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}C_1-\frac{1}{2}C_2.$$

Ответ можно теперь записать в векторной форме:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что последний из векторов является частным решением исходной системы, а другие два — это линейно независимые решения соответствующей однородной системы.

5. Решить однородную систему линейных уравнений и найти для нее фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=0, \\ 4x_1+x_3-7x_4=0, \\ 2x_2-3x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=0. \end{cases}$$

Решение. После проведения элементарных преобразований решение однородной системы записывается в виде

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

см. предыдущую задачу. Векторы

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений данной однородной системы уравнений. Тогда любое решение однородной системы можно представить в виде $\vec{x}=C_1\vec{e}_1+C_2\vec{e}_2$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вектор $\vec{x}\neq 0$ и число λ называются соответственно *собственным вектором* и *собственным значением* матрицы, если выполняется следующее равенство: $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$. Собственные значения являются корнями уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где E — единичная матрица. Составим матрицу $A-\lambda E$ и вычислим ее определитель.

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 6 \\ 3 & 2-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(A-\lambda E)=(2-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-6)=(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4).$$

Корни полученного многочлена — это $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=4$.

Найдем теперь собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 2$. Для этого решим однородную систему уравнений с матрицей $A - \lambda_1 E$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

после элементарных преобразований матрица приводится к виду

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений соответствующей однородной системы состоит из одного вектора

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

который является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 2$, а множество всех собственных векторов, соответствующих данному собственному значению, имеет вид $t\vec{a}_1$.

Вычислим теперь собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -1$.

Матрицу $A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ приводим к виду $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений соответствующей однородной системы состоит из одного вектора

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

который и является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_2 = -1$, а множество всех собственных векторов, соответствующих данному собственному значению, имеет вид $t\vec{a}_2$.

Вычислим теперь собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 4$.

Матрицу $A-\lambda_3 E=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6\\ 3 & -2 & 5\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ приводим к виду $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6\\ 0 & -2 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений соответствующей однородной системы состоит из одного вектора

$$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}4\\ 11\\ 2\end{pmatrix},$$

который и является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_3=4$, а множество всех собственных векторов, соответствующих данному собственному значению имеет вид $t\vec{a}_3$. Задача решена.

§ 1. Операции над матрицами

1.1. Даны матрицы A и B. Найдите матрицу C:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ -3 & 4 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $C=2A-3B$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 6\\ 8 & 3 & 4 & 1\\ -5 & 7 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 9 & 0\\ 2 & 6 & 4 & 1\\ -3 & 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $C=A-2B$.

1.2. Даны матрицы A и B. Найдите матрицу X, удовлетворяющую матричному уравнению:

а) $A+2X-4B=0$, $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 0\\ 6 & -2 & 4\\ 0 & 8 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ -2 & 0 & 5\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

а) $5A+3X-B=0$, $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 1 & 5\\ 3 & -2 & 4 & -3\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3 & 0\\ 2 & 3 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

1.3. Найдите $f(A)$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ и $f(x)=x^2-3x$.

1.4. Найдите произведение матриц A и B:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 4\\ 2 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 6\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ -1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$;

з) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 4\end{pmatrix}$; **и)** $A=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}$;

к) $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$;

л) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 2\\ 7 & 0 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

м) $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

1.5. Найдите произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ матриц A и B и установите, как при этом меняются столбцы или строчки матрицы B:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

1.6. Используя результат предыдущей задачи, представьте матрицу B в виде произведения матриц A и X. В ответе укажите матрицу X и порядок сомножителей ($B=A\cdot X$ или $B=X\cdot A$):

а) $A=\begin{pmatrix}342 & 211 & 645\\ 457 & 992 & 719\\ 123 & 403 & 842\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}645 & 211 & 342\\ 719 & 992 & 457\\ 842 & 403 & 123\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}342 & 211 & 645\\ 457 & 992 & 719\\ 123 & 403 & 842\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}457 & 992 & 719\\ 342 & 211 & 645\\ 123 & 403 & 842\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}332 & 211 & 123\\ 457 & 992 & 719\\ 123 & 403 & 842\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}996 & 633 & 369\\ 457 & 992 & 719\\ 123 & 403 & 842\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}111 & 203 & 343\\ 209 & 121 & 514\\ 221 & 106 & 678\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}333 & 812 & 343\\ 627 & 484 & 514\\ 663 & 424 & 678\end{pmatrix}$.

1.7. Возведите матрицу A в степень n:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $n=3$; **б)** $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $n=5$;

в) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $n=10$, $n=15$; **г)** $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n=10$;

д) $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$, n — произвольное натуральное число.

§ 2. Определитель и ранг матрицы

2.1. Найдите ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 3 & 8 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 6 & 2 & 4\\ 9 & 3 & 6\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & -3 & 7\\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1\\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9\end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 5 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}3 & 4 & 3\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 5 & -2\\ 4 & 11 & -7\\ 1 & -4 & -1\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3\end{pmatrix}$; **з)** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -5\\ -1 & -3 & 0 & 1\\ -2 & -9 & 4 & -2\\ 5 & 18 & -8 & -1\end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$; **к)** $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

2.2. Вычислите определитель

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}$; **д)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; **е)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2.3. Вычислите указанные миноры матриц:

а) M_{32}, $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **б)** M_{13}, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.4. Вычислите указанные алгебраические дополнения матриц:

а) A_{23}, $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **б)** A_{43}, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

2.5. Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам второй строки

а) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ x & y & z & t \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

2.6. Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам третьего столбца

а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & x & 8 \\ -4 & -1 & y & -5 \\ 8 & -1 & z & 12 \\ 4 & -1 & t & 7 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ -1 & -2 & b & -1 \\ -2 & 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$.

2.7. Вычислите определитель

а) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; **д)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ -2 & -5 & 7 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; **е)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 7 \\ -2 & -8 & -7 & -3 \\ -1 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2.8. При каком значении параметра a выполнено равенство

а) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & a+3 & -2 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 40$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & a+4 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -30$;

в) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -2 & a-2 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 18$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 4-a & 0 \end{vmatrix} = -36$?

2.9. При каких значениях параметра a система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно зависима:

а) $\vec{x}_1 = (3; 7; 4)$, $\vec{x}_2 = (3; 8; 6)$, $\vec{x}_3 = (3; a+5; 8)$;

б) $\vec{x}_1 = (1; 2; 6)$, $\vec{x}_2 = (a-4; -2; -2)$, $\vec{x}_3 = (3; 1; 1)$?

2.10. При каких значениях параметра a произвольный вектор в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно разложить по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

а) $\vec{a}_1 = (1; 4; 3)$, $\vec{a}_2 = (2; 1-a; 1)$, $\vec{a}_3 = (5; 4; 1)$;

б) $\vec{a}_1 = (-3; 1; 4)$, $\vec{a}_2 = (a+2; -2; -5)$, $\vec{a}_3 = (5; 1; 9)$?

2.11. При каком значении параметра a точки A, B, C и D лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.)

а) $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-1; 0; 1)$ и $D(a+1; 2; 0)$;

б) $A(0; 3; 1)$, $B(2; 8; 9)$, $C(1; 0; 2a-2)$ и $D(0; 8; 11)$.

2.12. При каких значениях параметра x площадь параллелограмма, построенного на векторах $(x; 3)$ и $(3; 4)$, больше площади параллелограмма, построенного на векторах $(2; 3)$ и $(3; 4)$?

2.13. При каких значениях параметра p объем параллелепипеда, построенного на векторах $(2; 3; 0)$, $(3; 4; 0)$ и $(7; 8; p)$, меньше объема параллелепипеда, построенного на векторах $(2; 3; 0)$, $(3; 4; 0)$ и $(7; 8; -4)$?

§ 3. Обратная матрица. Матричные уравнения

3.1. Найдите матрицу, обратную матрице A:

а) $A=\begin{pmatrix}3&6\\4&9\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}7&3\\4&2\end{pmatrix}$; **в)** $A=\begin{pmatrix}4&3\\6&5\end{pmatrix}$; **г)** $A=\begin{pmatrix}3&-4\\5&-8\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$; **е)** $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\\3&3&4\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$; **з)** $A=\begin{pmatrix}4&-1&2\\1&1&-2\\0&-1&3\end{pmatrix}$;

и) $A=\begin{pmatrix}1&4&1\\3&2&1\\6&-2&1\end{pmatrix}$; **к)** $A=\begin{pmatrix}3&1&3\\5&-2&2\\2&2&3\end{pmatrix}$.

3.2. Найдите значения параметров a, b и c, при которых матрицы A и B являются обратными:

а) $A=\begin{pmatrix}a-1&-2&3\\0&-1&c-2\\4&b&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-8&3&-6\\-4&2&-3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}a-3&3&5\\0&c&3\\-5&-1&b-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-15&29&12\\10&-19&-8\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}a-2&0&1\\-8&b+4&-6\\-4&2&c\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&-2&3\\0&-1&2\\4&2&-3\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}a&-2&-1\\-15&b+20&12\\10&-19&2c\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&3&5\\0&2&3\\-5&-1&-1\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\4&a&2\\5&-7&c\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\b&1&0\\-3&-1&2\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}1&0&-4\\3&1&1\\-1&0&a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&0&4\\b-20&1&c-10\\1&0&1\end{pmatrix}$.

3.3. Решите матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix}1&-6\\-2&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-8&1&-2\\4&-1&5\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}-2&1\\3&-6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4&-8&1\\-1&5&-2\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}3&-2\\-6&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1&4&-8\\5&-2&1\end{pmatrix}$; **г)** $X\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\1&-1\\-2&5\end{pmatrix}$;

д) $X\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\4&-1\\-5&2\end{pmatrix}$; **е)** $X\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\-5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\3&-3\\-1&1\end{pmatrix}$;

ж) $X\cdot\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&6&-3\end{pmatrix}$; **з)** $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&5\\0&1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-4&2\\15&0\\2&-1\end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&0&-1\\-4&3&0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-1\\-10&-2\end{pmatrix}$;

к) $X\cdot\begin{pmatrix}-1&-2&2\\1&1&-1\\0&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix}3&-2\\2&-1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$;

м) $\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\end{pmatrix}$.

3.4. Найдите A^{-1}, если

а) $A=\begin{pmatrix}0&0&-2&0&0\\0&0&0&0{,}1&0\\0&5&0&0&0\\0&0&0&0&-1\\0{,}2&0&0&0&0\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}0&4&-1&0&0\\0&0&0&0&0{,}2\\0&5&0&0&0\\0&0&0&2&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

(*Указание*: используйте метод Гаусса, считая матрицу A матрицей коэффициентов системы линейных уравнений с соответствующими правыми частями.)

§ 4. Системы линейных уравнений

4.1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=3,\\2x_1+5x_2-6x_3=1,\\3x_1+8x_2-10x_3=1;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=7,\\2x_1+x_2-4x_3=-3,\\3x_1+x_2-3x_3=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=1,\\5x_1+3x_2-2x_3=2,\\3x_1+2x_2-3x_3=0;\end{cases}$ **г)** $\begin{cases}5x_1+2x_2+5x_3=4,\\3x_1+5x_2-3x_3=-1,\\-2x_1-4x_2+3x_3=1.\end{cases}$

4.2. В какой точке линия пересечения плоскостей $3x+2y+z-5=0$ и $x+y-z=0$ пересекает плоскость $4x-y+5z-3=0$?

4.3. В какой точке линия пересечения плоскостей $2x+y-z-5=0$ и $x-2y+2z+5=0$ пересекает плоскость $7x+y+z-14=0$?

4.4. Решите систему линейных уравнений и найдите фундаментальную систему решений. Запишите ответ в векторном виде:

а) $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+10x_3=0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0, \\ 2x_1+12x_2-4x_3=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1-2x_2+34x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+79x_3=0; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x_1+2x_2+42x_3=0, \\ 3x_1+7x_2+109x_3=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1-22x_2+x_3+250x_4=0, \\ 2x_1-44x_2+3x_3+180x_4=0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1+33x_2+x_3-150x_4=0, \\ 3x_1+99x_2+4x_3+270x_4=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1-40x_2-x_3+120x_4=0, \\ 4x_1-160x_2-3x_3+640x_4=0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1-35x_2-x_3+130x_4=0, \\ 3x_1-105x_2-2x_3+150x_4=0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x_1-x_3+2x_4=0, \\ 3x_1-2x_2-4x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+14x_4=0; \end{cases}$ **к)** $\begin{cases} 10x_2+6x_3-12x_4=0, \\ -x_1+2x_2-3x_4=0, \\ 5x_1+x_2+6x_3+3x_4=0; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=0, \\ 5x_1-2x_2+x_3+7x_4=0; \end{cases}$ **м)** $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=0, \\ 2x_1-x_2-4x_3+4x_4=0, \\ 6x_1-x_2-4x_3+6x_4=0; \end{cases}$

н) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=0; \end{cases}$ **о)** $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=0, \\ -x_1+x_2+3x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3+3x_4=0; \end{cases}$

п) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0, \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0, \\ -3x_1+4x_2-11x_3+10x_4=0. \end{cases}$

4.5. Исследуйте системы линейных уравнений на совместность:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1-x_2+2x_4=3, \\ 5x_2-6x_3+4x_4=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+x_2+5x_3+x_4=2, \\ -x_1+4x_2+x_3+3x_4=1, \\ -5x_1+7x_2-3x_3+5x_4=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3+2x_4+x_5=3, \\ -2x_1+x_2+2x_4+3x_5=0, \\ x_1-4x_2+3x_3+x_4=2, \\ 3x_1-2x_2+6x_3+5x_4+4x_5=4. \end{cases}$

4.6. Представьте общее решение неоднородной системы уравнений в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы:

а) $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=1, \\ 2x_1-5x_2-2x_3=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=2, \\ 2x_1+5x_2-4x_3=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x_1+x_2-2x_3=1, \\ -3x_1+3x_2-5x_3=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=2, \\ 3x_1-3x_2+7x_3=9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+5x_4=3, \\ -3x_1-2x_2+12x_3-7x_4=-5; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+6x_4=8, \\ 2x_1+9x_2+5x_3+3x_4=7; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4=1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-x_4=3, \\ 2x_1+4x_2+11x_3-x_4=7; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+5x_4=6, \\ 4x_1+6x_2+x_3+12x_4=10; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 3x_1+x_2+6x_3-x_4=3, \\ 6x_1+2x_2+11x_3+x_4=12; \end{cases}$

л) $\begin{cases} 5x_1+x_2+3x_3+5x_4=5, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=3; \end{cases}$ м) $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-4x_2-11x_3-7x_4=2, \\ 3x_1-5x_2-13x_3-11x_4=1; \end{cases}$

н) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4=8, \\ 2x_1-x_2+x_3+8x_4=7; \end{cases}$ о) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2; \end{cases}$

п) $\begin{cases} x_1+20x_2+3x_3+20x_4=0, \\ 5x_1+100x_2+14x_3+89x_4=3, \\ 4x_1+80x_2+11x_3+69x_4=3; \end{cases}$

р) $\begin{cases} x_1+5x_2-10x_3+50x_4=1, \\ 3x_1+16x_2-30x_3+167x_4=0, \\ 2x_1+11x_2-20x_3+117x_4=-1; \end{cases}$

с) $\begin{cases} x_1+5x_2+11x_3+90x_4=0, \\ 4x_1+21x_2+44x_3+400x_4=1, \\ 5x_1+26x_2+55x_3+490x_4=1. \end{cases}$

4.7. При каких значениях параметра a система линейных уравнений совместна

а) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3, \\ 2x_1+5x_3=7, \\ x_1+x_2+(a+9)x_3=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3, \\ 2x_1+6x_2-5x_3=7, \\ x_1+6x_2-7x_3=a+3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+x_2-4x_3=4, \\ x_1+8x_2+(a-7)x_3=5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1-x_3+3x_4=10, \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=8, \\ 8x_1-2x_2+3x_3+4x_4=18, \\ 3x_1-x_2+2x_3=a; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+4x_4=1, \\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=2, \\ 3x_1+2x_3=1, \\ 3x_1+5x_2+x_3+ax_4=5; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+x_2-x_3-3x_4=2, \\ -11x_1+2x_2+x_3+12x_4=a; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} -x_1-4x_2+2x_3+3x_4=3, \\ -4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-2, \\ x_1-15x_2+4x_3+8x_4=a; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+2x_4=5, \\ -3x_1+2x_2+3x_3+x_4=-4, \\ 8x_1-10x_2+2x_3+2x_4=a; \end{cases}$

и) $\begin{cases} -x_1+3x_2-2x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+3x_2-4x_3+3x_4=-4, \\ 4x_1+15x_2-16x_3+17x_4=a? \end{cases}$

4.8. При каких значениях параметра a система линейных уравнений совместна? Решите системы линейных уравнений при найденных значениях параметра:

а) $\begin{cases} x_1+0\cdot x_2+11x_3+5x_4+90x_5=0,\\ 4x_1+0\cdot x_2+44x_3+21x_4+400x_5=1,\\ 5x_1+0\cdot x_2+55x_3+27x_4+530x_5=a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1-10x_2+0\cdot x_3+5x_4+50x_5=1,\\ 3x_1-30x_2+0\cdot x_3+16x_4+167x_5=0,\\ -x_1+10x_2+0\cdot x_3-7x_4-84x_5=a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+20x_2+3x_3+0\cdot x_4+20x_5=0,\\ 5x_1+100x_2+14x_3+0\cdot x_4+89x_5=1,\\ 11x_1+220x_2+30x_3+0\cdot x_4+187x_5=a; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1-22x_2+4x_3+40x_4+0\cdot x_5=1,\\ 3x_1-66x_2+11x_3+127x_4+0\cdot x_5=0,\\ -3x_1+66x_2-10x_3-134x_4+0\cdot x_5=a. \end{cases}$

4.9. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей A, имеет ненулевое решение:

а) $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4\\ 1 & 6 & 1\\ -2 & a+6 & 5 \end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix} 3 & 2+a & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2+a & 2\\ 2 & 9 & 2\\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$?

4.10. Найдите базис линейного пространства векторов, ортогональных векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Запишите ответ в векторном виде.

а) $\vec{a}=(1;-2;0;34)$, $\vec{b}=(3;-5;0;79)$;

б) $\vec{a}=(1;2;0;42)$, $\vec{b}=(3;7;0;109)$;

в) $\vec{a}=(1;-3;0;-31)$, $\vec{b}=(2;-5;0;-107)$.

4.11. Найдите ближайшую к точке A точку $M(x_1;x_2;x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

а) $\begin{cases} -x_1+4x_2-5x_3=-6,\\ 2x_1+4x_2+10x_3=12, \end{cases}$ $A=(0;0;-4)$;

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -12, \end{cases}$ $A = (0; -4; 0)$;

в) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -10, \\ -3x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 30, \end{cases}$ $A = (0; 0; 2)$;

г) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 10, \end{cases}$ $A = (0; 4; 0)$.

4.12. Предприятие выпускает 3 вида изделий с использованием двух видов сырья. Для продукции ценовой вектор $\vec{p}$, вектор наличного сырья $\vec{s}$, нормы расходов сырья даны элементами матрицы A. Требуется определить максимальную стоимость продукции P и оптимальный вектор-план выпуска продукции $\vec{q} = (q_1; q_2; q_3)$ при полном использовании всего сырья, т. е. надо найти максимум $P = \vec{p} \cdot \vec{q}^T$, если $\vec{q}$ — решение системы $A \cdot \vec{q}^T = \vec{s}^T$. При решении следует учесть, что все величины q_1, q_2, q_3 неотрицательны.

а) $\vec{p} = (6; 20; 100)$, $\vec{s} = (38; 96)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix}$;

б) $\vec{p} = (7; 20; 100)$, $\vec{s} = (38; 96)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix}$;

в) $\vec{p} = (8; 30; 100)$, $\vec{s} = (28; 65)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix}$.

§ 5. Собственные значения и собственные векторы матрицы

5.1. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственными векторами, соответствующими различным собственным значениям:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

5.3. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5.4. При каком значении параметра a матрица A имеет собственный вектор $\vec{v}$, соответствующий собственному значению λ:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = (-3; 1; a-1)$, $\lambda = 5$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = (2; 3; a-1)$, $\lambda = 2$;

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = (1; 3; a-2)$, $\lambda = 3$?

5.5. Проверьте, что вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы $\boldsymbol{A}$ и найдите соответствующее ему собственное значение λ:

а) $A = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 23 & 4 \\ -33 & -13 & 49 & 14 \\ -13 & -5 & 21 & 4 \\ -18 & -5 & 23 & 7 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 20 & -4 & 28 & -24 \\ 40 & 2 & 54 & -64 \\ 16 & 2 & 6 & -16 \\ 26 & -3 & 23 & -28 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.6. Какие из векторов $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ являются собственными векторами матрицы A? Найдите их собственные значения:

а) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -5 & 13 & 7 \\ -6 & 14 & 6 \\ 8 & -17 & -6 \end{pmatrix}$;

б) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -11 \\ 12 & -1 & 16 \\ 6 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

5.7. Найдите собственный вектор матрицы A, который соответствует большему собственному значению, имеет длину a и составляет тупой угол с указанной осью:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a=\sqrt{136}$, Ox;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $a=\sqrt{54}$, Oz;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $a=\sqrt{264}$, Oy.

5.8. Найдите множество собственных векторов матрицы A, соответствующих заданному собственному значению, решив соответствующую однородную систему линейных уравнений:

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 90 \\ 4 & 46 & 21 & 400 \\ 5 & 55 & 28 & 490 \\ 7 & 77 & 37 & 712 \end{pmatrix}$, $\lambda=2$;

б) $A=\begin{pmatrix} 4 & -10 & 5 & 50 \\ 3 & -27 & 16 & 167 \\ 2 & -20 & 14 & 117 \\ 4 & -40 & 21 & 220 \end{pmatrix}$, $\lambda=3$;

в) $A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 40 \\ 3 & 20 & 25 & 133 \\ 2 & 14 & 16 & 93 \\ 4 & 28 & 31 & 146 \end{pmatrix}$, $\lambda=-1$.

5.9. Матрица A имеет три собственных вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ с соответствующими собственными значениями λ_1, λ_2, λ_3. Для матрицы $f(A)$ найдите собственные векторы и собственные значения:

а) $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$, $f(A)=A^2+A$;

б) $\lambda_1=4$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$, $f(A)=A^2-A$.

Ответы к главе 2

§1

1.1. **а)** $C=\begin{pmatrix}-7&2&4\\-12&-1&-7\\5&2&-8\end{pmatrix}$; **б)** $C=\begin{pmatrix}7&-4&-17&6\\4&-9&-4&-1\\1&-1&-10&0\end{pmatrix}$.

1.2. **а)** $X=\begin{pmatrix}1&8&14\\-7&1&8\\8&6&5\end{pmatrix}$; **б)** $X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-30&-6&-2&-25\\-13&13&-22&16\\-9&-5&-3&-1\end{pmatrix}$.

1.3. $f(A)=\begin{pmatrix}2&8\\4&6\end{pmatrix}$.

1.4. **а)** $A\cdot B=\begin{pmatrix}22&11\\-19&-1\end{pmatrix}$; **б)** $A\cdot B=\begin{pmatrix}9&-5&-9\\25&15&-12\end{pmatrix}$;

в) $A\cdot B=\begin{pmatrix}14&22\\17&-9\\16&8\end{pmatrix}$; **г)** $A\cdot B=\begin{pmatrix}-6&-2\\13&-4\\21&1\end{pmatrix}$;

д) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1&15\\17&13\end{pmatrix}$; **е)** $A\cdot B=\begin{pmatrix}11&-14&10\\7&-6&7\end{pmatrix}$;

ж) $A\cdot B=\begin{pmatrix}6&7&3\\0&-8&6\\0&-6&6\end{pmatrix}$; **з)** $A\cdot B=(-12)$;

и) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&4&-6\\-1&-2&3\\4&8&-12\end{pmatrix}$; **к)** $A\cdot B=\begin{pmatrix}31\\-14\\18\end{pmatrix}$;

л) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-6&-17&-1\end{pmatrix}$; **м)** $A\cdot B=\begin{pmatrix}-6&13&18\\3&18&26\\-15&1&0\end{pmatrix}$.

1.5. **а)** $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&3&2\\4&6&5\\7&9&8\end{pmatrix}$;

б) $A\cdot B=\begin{pmatrix}5&2&4\\1&0&3\\8&24&16\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}5&2&32\\1&0&24\\1&3&16\end{pmatrix}$.

1.6. **а)** $X=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B=A\cdot X$; **б)** $X=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=X\cdot A$;

в) $X=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=X\cdot A$; **г)** $X=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=X\cdot A$.

1.7. **а)** $A^3=\begin{pmatrix}13&-14\\21&-22\end{pmatrix}$; **б)** $A^5=\begin{pmatrix}304&-61\\305&-62\end{pmatrix}$;

в) $A^{10}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A^{15}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$; **г)** $A^{10}=\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}$; **д)** $A=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$.

§ 2

2.1. **а)** 2; **б)** 1; **в)** 2; **г)** 3; **д)** 3; **е)** 2; **ж)** 3; **з)** 3; **и)** 3; **к)** 2.
2.2. **а)** 10; **б)** −31; **в)** −10; **г)** 8; **д)** 87; **е)** 10.
2.3. **а)** $M_{32}=8$; **б)** $M_{13}=24$.
2.4. **а)** $A_{23}=80$; **б)** $A_{43}=-16$.
2.5. **а)** $2a-8b+c+5d$; **б)** $-x-y-z+4t$.
2.6. **а)** $8x+15y+12z-19t$; **б)** $3a-b+2c+d$.
2.7. **а)** 40; **б)** −30; **в)** 18; **г)** −36; **д)** −40;
е) −150; **ж)** −10; **з)** 5; **и)** −720.
2.8. **а)** $a=-1$; **б)** $a=-9$; **в)** $a=5$; **г)** $a=2$.
2.9. **а)** $a=4$; **б)** $a=-2$.
2.10. **а)** $a\neq-\frac{9}{7}$; **б)** $a\neq 8{,}8$. **2.11.** **а)** $a=3$; **б)** $a=-2$.
2.12. $x\in(-\infty;2)\cup(2{,}5;\infty)$. **2.13.** $|p|<4$.

§ 3

3.1. **а)** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & -6\\ -4 & 3\end{pmatrix}$; **б)** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 7\end{pmatrix}$; **в)** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -6 & 4\end{pmatrix}$; **г)** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}8 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$; **ж)** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -7 & -3\\ -1 & 10 & 6\end{pmatrix}$;

з) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -3 & 12 & 10\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}$; **и)** $\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ -1{,}5 & 2{,}5 & -1\\ 9 & -13 & 5\end{pmatrix}$; **к)** $\begin{pmatrix}-10 & 3 & 8\\ -11 & 3 & 9\\ 14 & -4 & -11\end{pmatrix}$.

3.2. **а)** $a=-2,\ b=2,\ c=4$; **б)** $a=-1,\ b=3,\ c=2$; **в)** $a=3,\ b=-1,\ c=-3$;
г) $a=1,\ b=9,\ c=-4$; **д)** $a=-5,\ b=-2,\ c=3$; **е)** $a=5,\ b=4,\ c=-3$.

3.3. **а)** $X=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & -3 & 24\\ -12 & 1 & 1\end{pmatrix}$; **б)** $X=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-23 & 43 & -4\\ -10 & 14 & 1\end{pmatrix}$;

в) $X=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & 0 & -6\\ 9 & 18 & -45\end{pmatrix}$; **г)** $X=-\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; **д)** $X=-\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 17 & 7\\ -19 & -8\end{pmatrix}$;

е) $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1{,}5 & -1{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$; **ж)** $X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$; **з)** $X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$;

и) $X=\begin{pmatrix}10 & -1\\ 10 & -2\\ 9 & 0\end{pmatrix}$; **к)** $X=\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\\ 10 & 11 & -3\end{pmatrix}$; **л)** $X=\begin{pmatrix}35 & -22\\ 59 & -37\end{pmatrix}$;

м) $X=\begin{pmatrix}-50 & -76\\ 40 & 61\end{pmatrix}$.

3.4. **а)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0\\ -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$; **б)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

§4

4.1. **а)** $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=2$; **б)** $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=2$;
в) $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=1$; **г)** $x_1=-7$, $x_2=7$, $x_3=5$;

4.2. $x=-1$, $y=3$, $z=2$. **4.3.** $x=1$, $y=5$, $z=2$.

4.4. **а)** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}12\\23\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}12\\23\\1\end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-76\\17\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}-76\\17\\1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-570\\0\\320\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}22\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}-570\\0\\320\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}22\\1\\0\\0\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}870\\0\\-720\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-33\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}870\\0\\-720\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}-33\\1\\0\\0\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-280\\0\\-160\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}40\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}-280\\0\\-160\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}40\\1\\0\\0\end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}110\\0\\240\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}35\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}110\\0\\240\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}35\\1\\0\\0\end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}-2\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$; **к)** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\1\end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-3\\0\\8\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}-3\\0\\8\\1\end{pmatrix}$;

м) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-0{,}5\\3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}-0{,}5\\3\\0\\1\end{pmatrix}$;

н) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$;

о) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

п) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 24 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 24 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$

4.5. **а)** Совместна; **б)** несовместна; **в)** несовместна.

4.6. **а)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$ **б)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$ **г)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

е) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

ж) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix};$

з) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

и) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$

к) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix};$

л) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix};$ **м)** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

н) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

о) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

п) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$;

р) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 35 \\ -17 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

с) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 110 \\ -40 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.7. **а)** $a \neq -6$; **б)** $a = 2$; **в)** $a \neq 5$; **г)** $a = 0$; **д)** $a \neq 5$; **е)** $a = -4$; **ж)** $a = 11$; **з)** $a = 18$; **и)** $a = -2$.

4.8. **а)** $a = 2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $a = 5$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \\ -17 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $a = 3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

г) $a = 3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -68 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.9. **а)** $a = 2$; **б)** $a = -4$; **в)** $a = 3$.

4.10. **а)** $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\23\\0\\1\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-76\\17\\0\\1\end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}166\\45\\0\\1\end{pmatrix}$.

4.11. **а)** $x_1=6-5t$, $x_2=0$, $x_3=t$; $t=1$, $(1;0;1)$;
б) $x_1=2t+3$, $x_2=t$, $x_3=0$; $t=-2$, $(-1;-2;0)$;
в) $x_1=3t-10$, $x_2=t$, $x_3=0$; $t=3$, $(-1;3;0)$;
г) $x_1=2t+5$, $x_2=0$, $x_3=t$; $t=-2$, $(1;0;-2)$.

4.12. **а)** $P=518$, $\vec{q}=(3;0;5)$; **б)** $P=526$, $\vec{q}=(18;20;0)$;
в) $P=350$, $\vec{q}=(10;9;0)$.

§ 5

5.1 **а)** $\lambda=1$: $(1;1)$, $\lambda=3$: $(1;-1)$; **б)** $\lambda=3$: $(1;1)$, $\lambda=5$: $(1;-1)$;
в) $\lambda=-2$: $(3;-4)$, $\lambda=5$: $(1;1)$; **г)** $\lambda=-1$: $(1;-1)$, $\lambda=5$: $(1;2)$.

5.2. **а)** $\frac{1}{\sqrt{10}}$; **б)** $\frac{4}{\sqrt{65}}$; **в)** $\frac{3}{\sqrt{130}}$; **г)** $\frac{3}{\sqrt{58}}$.

5.3. **а)** $\lambda_1=2$, $(1;1;0)$; $\lambda_2=3$, $(2;1;0)$, $(0;0;1)$;
б) $\lambda_1=2$, $(1;0;0)$, $(0;1;1)$; $\lambda_2=4$, $(1;1;-1)$;
в) $\lambda_1=1$, $(2;-1;2)$; $\lambda_2=3$, $(1;-2;-1)$; $\lambda_3=5$, $(0;1;0)$;
г) $\lambda_1=2$, $(0;1;0)$; $\lambda_2=3$, $(1;3;1)$; $\lambda_3=5$, $(3;1;-3)$.

5.4. **а)** $a=3$; **б)** $a=4$; **в)** $a=3$.

5.5. **а)** $\lambda=2$; **б)** $\lambda=-4$; **в)** $\lambda=-12$.

5.6. **а)** $\vec{u}_2$, $\lambda=-1$, и $\vec{u}_3$, $\lambda=2$; **б)** $\vec{u}_1$, $\lambda=-2$, и $\vec{u}_3$, $\lambda=1$.

5.7. **а)** $\lambda=-2$, $\lambda=1$, $\lambda=4$, $t(3;4;3)$, $(-6;-8;-6)$;
б) $\lambda=1$, $\lambda=5$, $t(1;1;2)$, $(-3;-3;-6)$;
в) $\lambda=-2$, $\lambda=1$, $\lambda=6$, $t(5;4;5)$, $(-10;-8;-10)$.

5.8. **а)** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-11\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}110\\0\\-40\\1\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}10\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}35\\0\\-17\\1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-7\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}64\\0\\-13\\1\end{pmatrix}$.

5.9. **а)** Собственными векторами матрицы $f(A)$ являются векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Им соответствуют собственные значения $\lambda_1=6$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=12$.
б) Собственными векторами матрицы $f(A)$ являются векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Им соответствуют собственные значения $\lambda_1=12$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=6$.

II. Математический анализ функций одной переменной

Глава 3

Вычисление пределов, производная функции, исследование функций

Справочный материал и примеры решения задач

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-x^3+2x-6}{5x^4-x}$.

Решение. Для вычисления указанных видов пределов рациональных функций целесообразно поделить числитель и знаменатель дроби на аргумент в максимальной входящей в выражение степени, в данном случае на x^4. В результате получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-x^3+2x-6}{5x^4-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{6}{x^4}}{5-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{3}{5}.$$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-5x^3+2x}{x^4-x}$.

Решение. Числитель и знаменатель данной рациональной функции имеют пределы, равные нулю. В таких случаях целесообразно разложить оба выражения на множители, а затем можно соответствующие многочлены поделить на $x-1$. Получаем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^4-5x^3+2x}{x^4-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x^3-2x^2-2x)}{(x-1)(x^3+x^2+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-2x^2-2x}{x^3+x^2+x}=-\frac{1}{3}.$$

3. При вычислении различных пределов удобно пользоваться таблицей эквивалентностей. Напомним, что бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными (это записывается как $f(x)\sim g(x)$) при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Таблица эквивалентности некоторых функций при $x \to 0$

$$\sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},$$
$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad e^x - 1 \sim x,$$
$$\ln(1+x) \sim x, \quad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, \quad a^x - 1 \sim x\ln a,$$
$$(1+x)^a - 1 \sim ax, \text{ в частности } \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}.$$

4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - 1 + \cos 2x}{\sqrt{1-4x} - 1 + \ln(1-4x)}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - 1 + \cos 2x}{\sqrt{1-4x} - 1 + \ln(1+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - (1-\cos 2x)}{(\sqrt{1-4x} - 1) + \ln(1+3x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 5x}{x} - \dfrac{1-\cos 2x}{x}}{\dfrac{\sqrt{1-4x}-1}{x} + \dfrac{\ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{5-0}{-2+3} = 5.$$

5. Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$.
3. $(e^x)' = e^x$.
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
6. $(\sin x)' = \cos x$.
7. $(\cos x)' = -\sin x$.
8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

6. Правила дифференцирования

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$
$$(cf(x))' = cf'(x), \quad c = \text{const};$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x)))' = f'(t)\Big|_{t=g(x)} \cdot g'(x).$$

7. Формулы Маклорена для элементарных функций

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$
$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$
$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),$$
$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n), \quad x\to 0.$$

Задача 1. Вычислить *производную сложной функции* $y=\sin^3 x$.

Решение. Вычисляем по формуле для производной сложной функции.

Сначала выделим внутреннюю функцию $g(x)=\sin x$ и внешнюю функцию $f(t)=t^3$. Получаем:

$$g'(x)=\cos x, \quad f'(t)=3t^2, \quad (\sin^3 x)'=3t^2|_{t=\sin x}\cdot\cos x=3\sin^2 x\cos x.$$

Задача 2. Вычислить *производную функции* $y(x)$, *заданной в параметрической форме*: $x=2\cos t$, $y=4\sin t$.

Решение. Производная параметрически заданной функции $x=f(t)$, $y=g(t)$ вычисляется по формуле

$$y'(x)=\frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

В нашем примере получаем $y'(x)=\dfrac{4\cos t}{-2\sin t}=-2\operatorname{ctg} t$.

Задача 3. Вычислить *производную функции* $y(x)$, *заданной в неявной форме* $x^3+y^3-3xy=0$.

Решение. В случае неявного задания функции $F(x,y)=0$ для нахождения ее производной нужно:

1) вычислить производную по переменной x функции $F(x,y(x))$,

2) приравнять эту производную нулю,

3) решить полученное уравнение относительно $y'(x)$.

В нашем случае получаем $x^3+(y(x))^3-3xy(x)=0$,

$$3x^2+3y^2y'(x)-3y-3xy'(x)=0.$$

Отсюда получим, что $y'=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$ при $x\neq y^2$.

Задача 4. Найти приближенное значение $\sqrt[3]{8{,}12}$.
Решение. Для решения задачи используем то, что

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+df(x_0), \quad df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Здесь $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=8$, $\Delta x=0{,}12$, $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Получаем

$$\sqrt[3]{8{,}12} \approx \sqrt[3]{8}+\frac{0{,}12}{3\sqrt[3]{8^2}} = 2{,}01.$$

Задача 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$ с помощью правила Лопиталя.

Решение. Согласно правилу Лопиталя для неопределенностей $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(\cos x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{-\cos^2 x} = -2.$$

Задача 6. Провести исследование функции $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x=1$. Она равна нулю в точке $x=0$.

2. Вычислим первую производную данной функции: $y'=\dfrac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$.

3. Нахождение интервалов монотонности и точек экстремума функции.

Приравнивая первую производную функции нулю, находим ее критические точки (с учетом тех точек, где производная не существует): $x_1=0$, $x_2=\sqrt[3]{4}$, $x_3=1$. Данные точки разбивают область определения функции на четыре промежутка монотонности: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;\sqrt[3]{4})$, $(\sqrt[3]{4};+\infty)$. Так как $y'>0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(\sqrt[3]{4};+\infty)$ и $y'<0$ при $x\in(0;1)\cup(1;\sqrt[3]{4})$, то на промежутках $(-\infty;0)$ и $(\sqrt[3]{4};+\infty)$ функция возрастает, а на промежутках $(0;1)$ и $(1;\sqrt[3]{4})$ — убывает. Точка $x=0$ является точкой локального максимума ($y_{\max}=y(0)=0$), а точка $x=\sqrt[3]{4}$ — точкой локального минимума, $y_{\min}=y(\sqrt[3]{4})=\dfrac{4\sqrt[3]{4}}{3}$.

4. Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции. Для этого исследуем знак второй производной:

$$y''=\frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}.$$

Так как $y''>0$ при $x\in(-\infty;-\sqrt[3]{2})\cup(1;+\infty)$ и $y''<0$ при $x\in(-\sqrt[3]{2};0)\cup$ $\cup(0,1)$, то на промежутках $(-\infty;-\sqrt[3]{2})$ и $(1;+\infty)$ график функции является выпуклым вниз, а на промежутках $(-\sqrt[3]{2};0)$ и $(0,1)$ график функции является выпуклым вверх. При этом точка $x=-\sqrt[3]{2}$ области определения функции, при переходе через которую вторая производная меняет знак, задает точку перегиба, $y(-\sqrt[3]{2})=\dfrac{-2\sqrt[3]{2}}{3}$. Точка $x=1$ не задает точку перегиба, поскольку она не входит в область определения функции.

5. Найдем асимптоты графика.

Вертикальной асимптотой является прямая $x=1$, поскольку

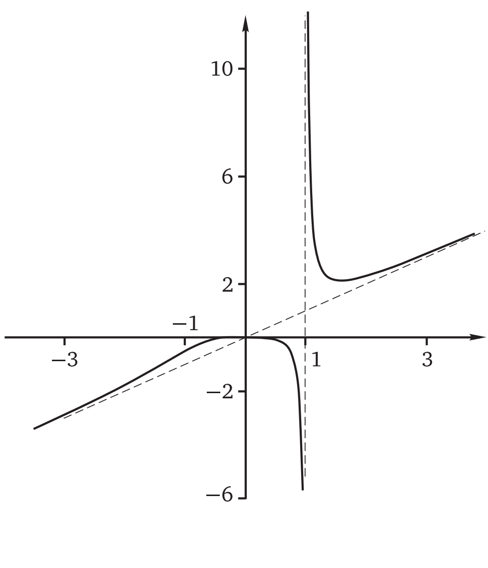
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4}{x^3-1}=\infty.$$

Найдем наклонные асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$. Для определения ее параметров последовательно вычислим два предела:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x(x^3-1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^3-1}=0.$$

В результате получаем, что наклонной асимптотой является прямая $y=x$. Исследование функции закончено.



§1. Предел последовательности, предел функции

Вычислите пределы последовательностей (1.1—1.37).

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+3n)^3-27n^3}{(1+4n)^2+2n^2}$.

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-2n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$.

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n^2-3n+1}{3n^2+n-5}\right)^2$.

1.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{8n^5-3n^2+9}{2n^5+2n^3+5}\right)^3$.

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+3n^2+5n+1}}{n+7}$.

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{4n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+3}}$.

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$.

1.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^4}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{4+n^2}}$.

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+5}+\sqrt[3]{8n^3+2}}{\sqrt[5]{n^5+1}}$.

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+2}}{7n+\sqrt[4]{n^4+1}}$.

1.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$.

1.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n 6^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}6^{n+1}}$.

1.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^{50}}{(2n-1)^{48}(n+2)^2}$.

1.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)^{98}(2n-1)^2}{(2n+4)^{100}}$.

1.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^6(9n-4)^4}{(3n-3)^{10}}$.

1.16. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{3n^2+2n+1}{n^2-n+2}}$.

1.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(3n^2+2n+1)}{n^2+3}$.

1.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$.

1.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+5}$.

1.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

1.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5+n^2}{n+1}+\dfrac{2-n^2}{n-1}\right)$.

1.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3+n^2}{n+2}+\dfrac{5-n^2}{n-2}\right)$.

1.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4-n^2}{n+3}+\dfrac{1+n^2}{n-3}\right)$.

1.24. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{5+4n^2}-2n)$.

1.25. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{1+n+9n^2}-\sqrt{2+n+9n^2})$.

1.26. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{1+5n+n^2}-\sqrt{3+n+n^2})$.

1.27. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2-3n+2n^2}-\sqrt{7+5n+2n^2})$.

1.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2+2n-7}-n}{4n+3}$.

1.29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2-7n+3}-n}{3n-4}$.

1.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{n}$.

1.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n+1}{5n^2+3n+2}\right)^{n^2+1}$.

1.32. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-2}\right)^{n}$.

1.33. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{n+2}$.

1.34. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)(\ln(2n+4)-\ln(2n+3))$.

1.35. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+3)(\ln(3n+7)-\ln(3n+5))$.

1.36. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+3}{n^2+2n-1}\right)^{3n+1}$.

1.37. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+5}{2n^2+n+1}\right)^{n}$.

Вычислите пределы функций (1.38—1.75).

1.38. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4}{x^2+x-3}$.

1.39. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+2}{x^2-1}$.

1.40. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$.

1.41. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$.

1.42. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

1.43. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+5x^2+6x}$.

1.44. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}$.

1.45. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$.

1.46. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

1.47. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

1.48. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$.

1.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$.

1.50. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+4}{3x^2-2}$.

1.51. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x+3}{x^3-1}$.

1.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+1}{x^2-3}$.

1.53. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

1.54. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

1.55. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x^{10}-10x^2}{2x^{10}+5x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^{10}-10x^2}{2x^{10}+5x^2}$.

1.56. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^{11}+15x^3}{2x^{11}-5x^3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{16x^{11}+15x^3}{2x^{11}-5x^3}$.

1.57. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{32x^{10}+4x^{15}}-3x^4}{x^2+8x^4}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{32x^{10}+4x^{15}}-3x^4}{x^2+8x^4}$.

1.58. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

1.59. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}\right)$.

1.60. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x-2}\right)$. **1.61.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x}-1}$.

1.62. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{\sqrt{x-4}-1}$. **1.63.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}$.

1.64. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. **1.65.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

1.66. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

1.67. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4})$.

1.68. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1})$.

1.69. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+6x+4}+x)$.

1.70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{19x}$. **1.71.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x^2)}{7x^2+x}$.

1.72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$. **1.73.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2+x^3}$.

1.74. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^x$. **1.75.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{6x+5}$.

1.76. Найдите порядок малости функций при $x\to 0$:

а) $f(x)=x\sin 5x$; **б)** $f(x)=\sin^2 5x\ln(1+3x)$;

в) $f(x)=\left(\sqrt[3]{1+2x}-1\right)^4\cos\pi x$; **г)** $f(x)=\dfrac{x^5}{1+x^7}\operatorname{arctg} x$;

д) $f(x)=(e^x-1)\ln(\cos x)$; **е)** $f(x)=(3^x-1)\ln(1+\sin 5x)$;

ж) $f(x)=(e^{x^2}-1)\ln(1+e^x)$; **з)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x^3}-1}{x}$.

1.77. При каком значении параметра C функции $f(x)$ и $g(x)$ являются эквивалентными при $x\to x_0$:

а) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^5}-\dfrac{4}{(x-1)^5(x+3)}$, $g(x)=\dfrac{C}{(x-1)^4}$, $x_0=1$;

б) $f(x)=\dfrac{(x+3)^4}{x+5}+\dfrac{(x+3)^4}{x+1}$, $g(x)=C(x+3)^5$, $x_0=-3$;

в) $f(x)=\dfrac{3}{(x-2)(x-5)^3}-\dfrac{1}{(x-5)^3}$, $g(x)=\dfrac{C}{(x-5)^2}$, $x_0=5$;

г) $f(x)=\dfrac{(x+1)^6}{x-2}+\dfrac{(x+1)^6}{x+4}$, $g(x)=C(x+1)^7$, $x_0=-1$?

1.78. Докажите, что

а) $x^3-x^2-x+1=o(x-1)$ при $x\to 1$;

б) $\sqrt[3]{x^7}+\sin x^2=o(\sqrt[5]{x^8})$ при $x\to 0$;

в) $x^3-2x^4=o(\sin^2 2x)$ при $x\to 0$;

г) $\dfrac{3x+1}{5x^3-x}=o\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)$ при $x\to\infty$;

д) $7x-2x^2=O(x)$ при $x\to 0$;

е) $x\sin\sqrt{x}=O(x^{3/2})$ при $x\to 0$;

ж) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)=O(1)$ при $x\to 0$;

з) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to\infty$.

Вычислите пределы, используя замены функций на эквивалентные (1.79—1.115).

1.79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^3)}{(e^{2x^2}-1)\sin 3x}$.

1.80 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{\ln(\cos 5x)}$.

1.81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$.

1.82. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{e^{4-x}-1}{\sqrt{2x-7}-1}$.

1.83. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$.

1.84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{\dfrac{2+x}{2-7x}}-1\right)$.

1.85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt[3]{\dfrac{3+5x}{3-4x}}-1\right)$.

1.86. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}$.

1.87. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{e^{2x^2}-1}$.

1.88. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{3x}$.

1.89. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{3\operatorname{arctg} x}$.

1.90. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$.

1.91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 x}$.

1.92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\sin^2 2x}$.

1.93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{\sqrt{\cos 5x}-1}$.

1.94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2+1}-e}{\ln(\cos 2x)}$.

1.95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+\sin 2x)}{\sqrt{1-6x^2}-1}$.

1.96. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{e^{x-1}-1}$.

1.97. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(3x-8)}{\sqrt{x-2}-1}$.

1.98. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$.

1.99. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{\ln(x-1)}$.

1.100. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

1.101. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

1.102. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.103. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

1.104. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

1.105. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\ln(\cos x)}}$.

1.106. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+2x^2)}}$.

1.107. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sqrt{1-6x}-1}}$.

1.108. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

1.109. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

1.110. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

1.111. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

1.112. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

1.113. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

1.114. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+7}\right)^{f\left(\frac{1}{n}\right)}$, если $f(x)\sim\dfrac{5}{x^2}$ при $x\to 0$.

1.115. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+2x^2}{4-x^2}\right)^{f\left(\frac{1}{x}\right)}$, если $f(x)\sim 4x^2$ при $x\to\infty$.

§ 2. Производная функции, заданной явно

2.1. Используя определение производной, вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos a-\cos x}{x-a}$;

в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3^{2+\Delta x}-9}{\Delta x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{x-1}$;

д) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(2\operatorname{tg}(x+\Delta x))-\cos(2\operatorname{tg} x)}{4\Delta x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(\operatorname{tg} x)-f(1)}{x-\frac{\pi}{4}}$,

если $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$, $f(1)=3$, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4$, $f'(1)=5$;

ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(x)\operatorname{tg} x-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4x-\pi}$,

если $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$, $f(1)=3$, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4$, $f'(1)=5$.

Найдите производную функции (2.2—2.45).

2.2. $y=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{5}{2x^2}+\dfrac{4}{5\sqrt{x}}$.

2.3. $y=2x^3\ln x$.

2.4. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

2.5. $y=\dfrac{2x^2-5x+6}{3x^4+x+1}$.

2.6. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

2.7. $y=\dfrac{x\ln x-5\cos x+1}{2x^3+1}$.

2.8. $y=\sqrt{1+x^2}$.

2.9. $y=\sqrt[11]{6+5\sqrt{2x}}$.

2.10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$.

2.11. $y=(3+2x^4-5x^3)^4$.

2.12. $y=\sqrt[3]{2x^3+x+3}$.

2.13. $y=\ln(x^2+3x-\sqrt{x})$.

2.14. $y=\ln\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)$.

2.15. $y=\sin^2 3x$.

2.16. $y=\log_2^3(2x+2)^4$.

2.17. $y=e^{x\ln(3x+1)}$.

2.18. $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$.

2.19. $y=\ln^2(1+\cos 2x)$.

2.20. $y=\sqrt{\ln(x^2+\cos x)}$.

2.21. $y=\cos(4x^2\ln x)$.

2.22. $y=\ln(\arcsin\sqrt{x})$.

2.23. $y=e^{\sqrt{(x^2+x)\sin x}}$.

2.24. $y=x^3(3x-7x^2)^4$.

2.25. $y=(3x^4-5x)\ln(x+\sqrt{x})$.

2.26. $y=(\sqrt{1+x^2}-3x^2)\operatorname{arctg}(2x^3)$.

2.27. $y=e^{x^2}\sqrt{x^3+4x^2-7}$.

2.28. $y=x\cdot\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

2.29. $y=\dfrac{3}{5(2-\sin x)^3}$.

2.30. $y=\dfrac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}$.

2.31. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

2.32. $y=\dfrac{x\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$.

2.33. $y=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

2.34. $y=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$.

2.35. $y=\log_{x^2+x+2}\big(e^{4x}+\sqrt{1+e^{8x}}\big)$.

2.36. $y=\ln\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$.

2.37. $y=\dfrac{e^{-x^2}}{1+\sqrt{x}}$.

2.38. $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+1}}$.

2.39. $y=x^2\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

2.40. $y=x^{\sqrt{2+\sin^2 3x}}$.

2.41. $y=(x^2+1)^x$.

2.42. $y=(x+1)^{\operatorname{tg} x}$.

2.43. $y=(3x^2+3x-2)^{\operatorname{arctg} x}$.

2.44. $y=e^{x^2}(\cos x)^{\sqrt{x}}$.

2.45. $y=x^2(\operatorname{tg} x)^{3x-2}$.

2.46. Чему равно значение $f(a)$, если известно, что

$$f(x) = g(h(x)) \quad \text{и}$$

а) $g(a)=b,\ h(a)=c$; **б)** $g(b)=c,\ h(a)=b$?

2.47. Чему равно значение $f'(a)$, если известно, что

$$f(x) = g(h(x)) \quad \text{и}$$

а) $g'(a)=\alpha,\ h'(a)=\beta$; **б)** $g'(b)=\alpha,\ h'(a)=\beta,\ h(a)=b$?

2.48. Найдите $g'(1)$, если $g(x)=f(f(f(x)))$, где
а) $f(x)=x^6-x+1$; **б)** $f(x)=x^3+1$.

2.49. Вычислите дробь $\dfrac{h'(x)}{g'(3^x)}$, если $h(x)=g(3^x)$.

2.50. Вычислите дробь $\dfrac{h'(x)}{g'(x)}$, если $g(x)=\ln h(x)$.

2.51. Найдите при $x=2$ значение сложной функции $f(x)=g(h(x))$ и ее производной, если $g(1)=2$, $h(1)=1$, $g'(x)=\pi x^{\pi-1}$ и $h'(x)=3x^2$.

2.52. Найдите значения параметров a и b, при которых функция $y=f(x)$ будет дифференцируема на всей числовой прямой:

а) $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<3, \\ ax^2+10x-5b, & x\geqslant 3; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1, & x\geqslant 0, \\ (x+a)e^{-bx}, & x<0. \end{cases}$

2.53. Для функции y найдите предел эластичности $\mathrm{E}_x(y)$ при $x\to\infty$, если эластичность функции $y=y(x)$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{E}_x(y) = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} = \frac{y'\cdot x}{y}.$$

Проверьте ответ, найдя эластичность функции $z=C\cdot x^n$, эквивалентной y при $x\to\infty$.

а) $y=\dfrac{x^5+3}{x^2+x}$; **б)** $y=\dfrac{x^3-x}{x^4+1}$.

2.54. Для функции y найдите предел эластичности $\mathrm{E}_x(y)$ при $x\to\infty$, если эластичность функции $y=y(x)$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{E}_x(y) = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} = \frac{y'\cdot x}{y}.$$

Проверьте ответ, найдя эластичность функции $z = C \cdot x^n$, эквивалентной y при $x \to 0$.

а) $y = \dfrac{x^{10}+3}{x^6+x^4}$; **б)** $y = \dfrac{2-x^4}{x^7+x^3}$.

2.55. К графику функции $y = 0{,}5(x-2)^6$ в точке $M(3; 0{,}5)$ проведена касательная. На касательной взяты точки A и B с разностью проекций на ось Ox, равной 5. Найдите

а) разность их проекций на ось Oy;

б) квадрат расстояния между точками A и B.

2.56. Прямая l получена зеркальным отражением касательной к графику функции $y = 0{,}5(x-2)^6$ в точке $M(3; 0{,}5)$ относительно прямой $y = x$. Найдите квадрат расстояния между точками A и B, находящимися на прямой l, если разность их проекций на ось Ox равна 6.

2.57. Напишите уравнение касательной к параболе $y = x^2 - x$, проходящей через точку с координатами (2; 1).

2.58. В какой точке на параболе $y = x^2$ касательная

а) параллельна прямой $y = 4x - 1$;

б) перпендикулярна прямой $2x - 6y + 3 = 0$;

в) составляет с прямой $3x - y + 1 = 0$ угол $45°$?

2.59. Напишите уравнение касательной, которая перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$, к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 5$.

2.60. Напишите уравнение прямой, которая проходит через начало координат и касается гиперболы $y = \dfrac{x+9}{x+5}$.

2.61. Найдите производные указанного порядка от следующих функций:

а) $y = (x^2+1)^3$, y''; **б)** $y = xe^{x^2}$, y'';

в) $y = \sqrt{9-x^2}$, y''; **г)** $y = \cos^2 x$, y''';

д) $y = \dfrac{1}{1-x}$, $y^{(5)}$; **е)** $y = x^3 \ln x$, $y^{(4)}$;

ж) $y = 3^{2x+5}$, $y^{(5)}$; **з)** $y = (x^2+1)\ln x$, $y^{(5)}$;

и) $y = \ln(2x+4)$, $y^{(n)}$; **к)** $y = \dfrac{x}{x+1}$, $y^{(n)}$;

л) $y = \sin(3x+1)$, $y^{(n)}$.

2.62. Найдите $f''(1)$, если $f(x) = g(h(x)$ и $h(1) = 2$, $h'(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g(1) = 3$, $g(2) = 10$, $g'(5) = 3$, $g'(3) = 4$, $g'(2) = 2$, $h''(1) = 5$, $g''(5) = 4$, $g''(2) = -1$.

2.63. Найдите $h^{(7)}(x)$, если $h^{(5)}(x) = 4^{-\sin x}$.

§ 3. Производная функций, заданных параметрически или неявно

3.1. Напишите уравнения касательных к графикам следующих функций, заданных параметрически, в точке, соответствующей $t=t_0$:

а) $y=2t^2-3t+1$, $x=-t^2+2t+4$, $t_0=2$;

б) $y=2t^2+4t-10$, $x=4t^2-12t+7$, $t_0=2$;

в) $y=-t^2+5t+3$, $x=2t^2-3t$, $t_0=-1$;

г) $y=5t^2-2t-5$, $x=t^2+4t-1$, $t_0=-1$;

д) $x=\dfrac{t}{1+t^3}$, $y=\dfrac{t^2}{1+t^3}$, $t_0=1$;

е) $x=\dfrac{1+\ln t}{t^2}$, $y=\dfrac{3+2\ln t}{t}$, $t_0=1$;

ж) $x=\dfrac{t+1}{t}$, $y=\dfrac{t-1}{t}$, $t_0=-1$;

з) $x=\dfrac{1}{t+1}$, $y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$, $t_0=-\dfrac{1}{2}$.

3.2. Найдите производные второго порядка y''_{xx} функции $y=f(x)$, заданной параметрически:

а) $x=t^3$, $y=t^2$;

б) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$;

в) $x=\dfrac{t^2}{1+t^3}$, $y=\dfrac{t^3}{1+t^3}$;

г) $x=\dfrac{e^t}{1+t}$, $y=(t-1)e^t$;

д) $x=\ln(1+t^2)$, $y=\operatorname{arctg} t$;

е) $x=\dfrac{1}{t^2}$, $y=\dfrac{1}{1+t^2}$.

3.3. Зависимость y от x задана параметрически ($x=x(t)$ и $y=$ $=y(t)$), найдите при заданных условиях

а) $\dfrac{d^{11}y}{dx^{11}}$ при $t=2$; $\dfrac{d^{10}y}{dx^{10}}=\dfrac{e^t}{t}$ и $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{e^t}{t^3}$;

б) $\dfrac{d^8y}{dx^8}$ при $t=\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{d^7y}{dx^7}=\sin^{10} t$ и $\dfrac{dx}{dt}=\sin^9 t$.

3.4. Найдите значение производной $y'(M)$ функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением

а) $e^x+\sqrt{x+y}=y+1$, $M(0;1)$;

б) $\ln(x+y^2)+\operatorname{arctg} x=0$, $M(0;1)$;

в) $\sqrt{xy}+\ln y=x^5$, $M(1;1)$;

г) $e^{y^2-1}+x^2(y+0{,}5)=7$, $M(2;1)$.

3.5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке M, к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением:

а) $xy+\ln y=1$, $M(1;1)$;

б) $x^2+2xy-y^2=7$, $M(2;1)$.

в) $x^2+xy+y^2=3$, $M(1;1)$;

3.6. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке M, к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно:

а) $y^{2x}+3xy^2-2x-12y+9=0$, $M(2;\,1)$;

б) $x^{y-1}-2x^2y^3+3x+20y-28=0$, $M(1;\,2)$;

в) $x^{1+\ln y}+4x^2y^3+3x+12y-20=0$, $M(1;\,1)$;

г) $y^{x-y}+5xy^3-7x-21y+24=0$, $M(2;\,1)$.

3.7. Найдите вторые производные y''_{xx} функции $y=y(x)$, заданной неявно:

а) $y=\sin(x+y)$; **б)** $e^{x-y}=x+y$;

в) $e^{2y}-2\ln x-1=0$; **г)** $x^2+2xy-y^2=16$;

д) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; **е)** $y=2x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3.8. Зависимость $y=f(x)$ задана неявно уравнением. Найдите параметр b в уравнении $y=kx+b$ касательной к графику $y=f(x)$ в точке A, если:

а) $x\cdot g(y)+y\cdot h(x)-15=0$, $A(2;\,3)$, $g(3)=-3$, $g'(3)=-4$, $h(2)=7$, $h'(2)=2$;

б) $x\cdot g(y)+y\cdot h(x)+28=0$, $A(3;\,2)$, $g(2)=-6$, $g'(2)=2$, $h(3)=-5$, $h'(3)=4$.

§ 4. Дифференциал функции и приближенные вычисления

4.1. Найдите первый и второй дифференциал функции

а) $y=(1+x+x^2)e^{-x}$; **б)** $y=3x-1+\operatorname{tg}4x$;

в) $y=x(\sin\ln x+\cos\ln x)$; **г)** $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

4.2. Найдите d^2y в точке $(x_0;\,y_0)$ для функции $y=y(x)$, заданной неявно:

а) $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$, $(1;\,1)$;

б) $2\ln(y-x)+\sin xy=0$, $(0;\,1)$;

в) $x^3y+\arcsin(y-x)=1$, $(1;\,1)$;

г) $3(y-x+1)+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=0$, $(1;\,0)$.

4.3. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если

а) $g(-5)=-3$, $g(x)=-2{,}96$ и $g'(-5)=2$;

б) $g(5)=2$, $g(x)=2{,}04$ и $g'(5)=-4$;

в) $g(-5)=2$, $g(x)=2{,}04$ и $g'(-5)=-4$;

г) $g(-3)=5$, $g(x)=5{,}04$ и $g'(-3)=-2$.

4.4. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y=f(x)$ в точке $x=a$:

а) $f(x)=x^5$, $a=2{,}001$; **б)** $f(x)=\sqrt{4x-3}$, $a=0{,}98$;
в) $f(x)=\sqrt{x^3}$, $a=1{,}02$; **г)** $f(x)=x^3$, $a=2{,}999$;
д) $f(x)=e^{x-3}-2x$, $a=2{,}98$; **е)** $f(x)=\sqrt{4x+1}$, $a=1{,}97$;
ж) $f(x)=-x-\ln(x+2)$, $a=-1{,}03$;
з) $f(x)=e^{x^2-x}$, $a=1{,}2$.

4.5. Используя понятие дифференциала функции, вычислите приближенно:

а) $1{,}015^5$; **б)** $\sqrt{3{,}98}$; **в)** $\sqrt[3]{1{,}02}$;
г) $\sqrt[3]{124}$; **д)** $\sqrt[4]{80{,}5}$; **е)** $\operatorname{arctg} 1{,}04$.

4.6. Вычислите приближенно с использованием дифференциала, на сколько за 3 года изменится начальный вклад, составляющий 980 рублей, если годовая процентная ставка составляет 0,1 %?

4.7. На сколько увеличится объем шара, если его радиус $R=15$ см увеличить на 0,2 см? Вычислите приближенно с использованием дифференциала.

4.8. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема. Докажите, что

$$f(x+at)-f(x) = k\cdot t+o(t)$$

при $t\to 0$ $(a\neq 0)$. Найдите k.

4.9. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема. Докажите, что

$$f(x+at)-f(x) \sim k\cdot t$$

при $t\to 0$ $(a\neq 0)$. Найдите k.

4.10. Известно, что $f(x+at)-f(x)\sim k\cdot t$ при $t\to 0$ $(k\neq 0,\ a\neq 0)$. Докажите, что функция $f(x)$ дифференцируема, и найдите $f'(x)$.

§ 5. Формула Тейлора

5.1. Разложите функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ по целым неотрицательным степеням двучлена $x+3$ до члена третьего порядка включительно.

5.2. Разложите функцию $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ по целым неотрицательным степеням двучлена $x-1$ до члена четвертого порядка включительно.

5.3. Найдите три члена разложения функции $f(x)=\sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

5.4. Функцию $f(x)$ в окрестности точки $x=0$ приближенно замените многочленом третьей степени:

а) $f(x)=e^{2x-x^2}$; **б)** $f(x)=e^{\sin x}$.

5.5. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$, используя формулу Тейлора:

а) по степеням $x-10$; найдите $P''(10)$, если $P(10)=4$, $P'(10)=1$, $P'''(10)=18$, $P^{(4)}(10)=48$ и $P(11)=11$;

б) по степеням $x-11$; найдите $P'''(11)$, если $P(11)=5$, $P'(11)=4$, $P''(11)=6$, $P^{(4)}(11)=72$ и $P(10)=5$;

в) по степеням $x-2$; найдите $P(-1)$, если $P(2)=-1$, $P'(2)=0$, $P''(2)=2$, $P'''(2)=-12$, $P^{(4)}(2)=24$.

5.6. При каких значениях параметров a и b выполнено равенство $ae^x-\dfrac{b}{1-x}=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{6}x^3+o(x^3)$ при $x\to 0$?

5.7. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите Cx^n, если при $x\to 0$

а) $6\cos 2x-6-12x^2=Cx^n+o(x^n)$;

б) $4e^{-x^3}-4+4x^3=Cx^n+o(x^n)$;

в) $15\sin 2x-30x+20x^3=Cx^n+o(x^n)$;

г) $8\sqrt{1+x^2}-8-4x^2=Cx^n+o(x^n)$.

5.8. Используя табличное разложение соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите разложение функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x_0=0$. Ограничьтесь в разложении первым отличным от нуля членом.

а) $f(x)=\sqrt{1+4x^2}+2x^4-2x^2-1$;

б) $f(x)=e^{-2x}-2x^2+2x-1$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{1-6x}+4x^2+2x-1$;

г) $f(x)=e^{4x}-8x^2-4x-1$.

5.9. Используя разложения по формуле Маклорена для элементарных функций, найдите, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом, приближенное значение

а) $f(0{,}5)$, где $f(x)=3\sin x-\sin 3x$;

б) $f(0{,}3)$, где $f(x)=2\cos 2x-2\cos x$;

в) $f(0{,}5)$, где $f(x)=\sqrt{1-2x^2}+x^2-1$;

г) $f(0{,}2)$, где $f(x)=\sqrt[3]{1+3x}-1-x$.

5.10. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите указанное приближенное значение:

а) $f(0{,}5)$, где $f(x)=3\cos 2x-3+6x^2$;

б) $f(0{,}5)$, где $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-2-x^2$;

в) $f(0{,}4)$, где $f(x)=e^{2x}-1-2x$.

г) $f(0{,}5)$, где $f(x)=6\ln(1+x^2)-6x^2+3x^4$.

5.11. Используя формулу Маклорена, найдите $f^{(4)}(0)$:

а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x+x^2}-\cos x^2$;

б) $f(x)=\sin^2 x-\dfrac{x^2}{x^2+1}$;

в) $f(x)=\ln(1-x+x^2)+x-\dfrac{x^2}{2}$.

5.12. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 и сохраняя члены до второго порядка малости включительно относительно Δx, найдите приближенное значение выражения

а) $2f(x_0+2\Delta x)-3f(x_0)+f(x_0-4\Delta x)$;

б) $2f(x_0+3\Delta x)-5f(x_0)+3f(x_0-2\Delta x)$;

в) $f(x_0+4\Delta x)-3f(x_0)+2f(x_0-2\Delta x)$;

г) $4f(x_0+3\Delta x)-7f(x_0)+3f(x_0-4\Delta x)$.

5.13. Используя стандартное разложение функции y по формуле Маклорена по степеням $t=\dfrac{1}{x}$, найдите наклонные асимптоты графика функции

а) $f(x)=x^3\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-x^2,\quad y=\ln(1+t)$;

б) $f(x)=x^2\left(e^{\frac{2x+1}{x}}-e^2\right),\quad y=e^t$;

в) $f(x)=\sqrt[10]{x^{20}+10x^{19}}-x^2,\quad y=(1+t)^\alpha$;

г) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+4}},\quad y=(1+t)^\alpha$.

§ 6. Вычисление пределов с помощью производной

Используя правило Лопиталя, вычислите пределы (6.1—6.15).

6.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\sin 2x}$.

6.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{2x}-2}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^5}{e^{\frac{x}{100}}}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

6.8. $\lim\limits_{x\to 1-} \ln x \ln(1-x)$.

6.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.

6.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

6.12. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

6.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$.

6.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2x}{x^2 \arcsin x}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

Используя стандартные разложения элементарных функций по формуле Маклорена, вычислите пределы (6.16—6.22).

6.16. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

6.17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

6.18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)$.

6.22. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{7/4}\left(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}\right)$.

6.23. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Используя формулу Тейлора или правило Лопиталя, найдите

а) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + 2\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - 5\Delta x)}{3\Delta x}$, если $f(x_0) = 3$, $f'(x_0) = 6$;

б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + 5\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - 7\Delta x)}{2\Delta x}$, если $f(x_0) = 4$, $f'(x_0) = 8$.

§ 7. Исследование функций и построение графиков

7.1. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на указанном отрезке:

а) $f(x) = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0; 3]$;

б) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на отрезке $[-3; 1]$;

в) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 6$ на отрезке $[0; 2]$;

г) $f(x) = x^2 + 4|x-1| - 4$ на отрезке $[-1; 2]$;

д) $f(x) = x^2 + 6|x-2| - 12$ на отрезке $[-1; 3]$;

е) $f(x) = x^2 + 8|x-3| - 24$ на отрезке $[-1; 4]$.

7.2. Найдите точку минимума функции $f(x^3-9x^2+24x+10)$, если $f(x)$ — монотонно убывающая функция, не имеющая критических точек.

7.3. Найдите точку максимума функции $f(5+45x-3x^2-x^3)$, если $f(x)$ — монотонно убывающая функция, не имеющая критических точек.

7.4. Функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную вторую производную при всех $x\in(-\infty;+\infty)$. График функции $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=1-x$ при $x\to-\infty$ и $y=2x+1$ при $x\to+\infty$. Кроме того, $(x-2)\cdot f''(x)<0$ при всех $x\neq 2$. Изобразите эскиз графика $y=f(x)$ и оцените возможные значения $f(2)$.

7.5. Функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную вторую производную при всех $x\in(-\infty;+\infty)$. График функции $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=x+3$ при $x\to-\infty$ и $y=2x-2$ при $x\to+\infty$. Кроме того, $(x+1)\cdot f''(x)>0$ при всех $x\neq -1$. Изобразите эскиз графика $y=f(x)$ и оцените возможные значения $f(-1)$.

7.6. Найдите сумму ординат всех точек пересечения асимптот графика

а) $y=\dfrac{2x^3-3x^2}{x^2-3x+2}$; **б)** $y=\dfrac{3x^2-2x^3}{x^2+2x-8}$.

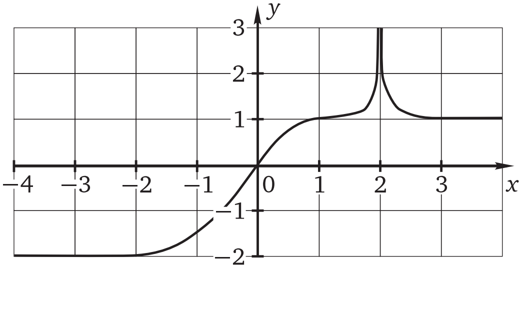
7.7. При каких значениях параметров a и b график функции $y=f(x)$ имеет указанную асимптоту?

а) $f(x)=\dfrac{ax^2+4}{x+b}$; $y=2x-2$ при $x\to\infty$;

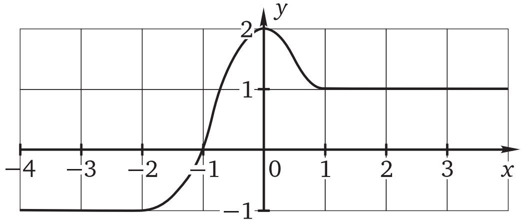
б) $f(x)=\dfrac{ax^2-5}{x+b}$; $y=3x+3$ при $x\to\infty$.

7.8. Исследуйте поведение непрерывной функции $y=f(x)$ и изобразите эскиз ее графика по графику ее производной $y=f'(x)$, если $f(0)=1$.

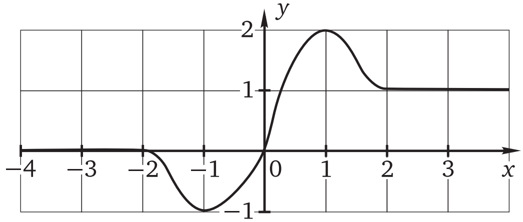
а)



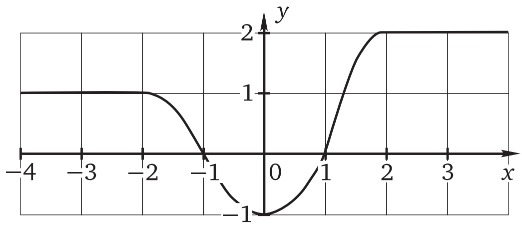
б)


y
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
−1

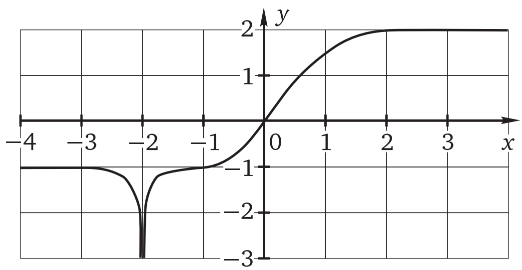
в)


y
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
−1

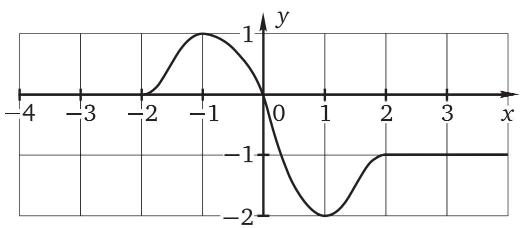
г)


y
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
−1

д)

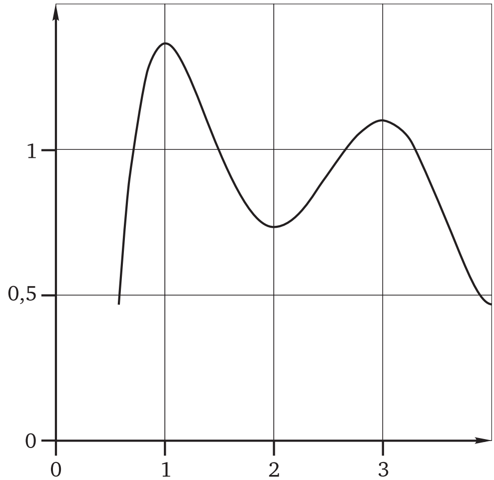

y
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
−1
−2
−3

е)

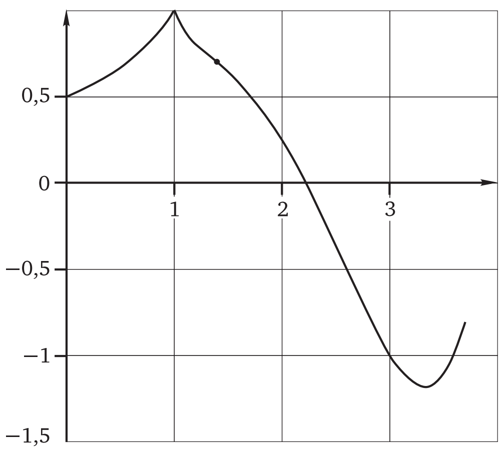

y
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
−1
−2

7.9. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, выясните вид графиков ее первой и второй производных.

а)



б)



Проведя необходимое исследование, постройте графики следующих функций (7.10—7.47).

7.10. $y=(x+1)(x-2)^2$.

7.11. $y=(x-1)^2(x+3)$.

7.12. $y=x^2(x+1)^2$.

7.13. $y=x(x-2)^3$.

7.14. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

7.15. $y=\dfrac{5}{x^6}-\dfrac{6}{x^5}$.

7.16. $y=-4x+1+\dfrac{1}{(x-2)^4}$.

7.17. $y=-5x+4-\dfrac{1}{(x-1)^5}$.

7.18. $y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$.

7.19. $y=\dfrac{4x^2+3x}{2x+2}$.

7.20. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

7.21. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

7.22. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

7.23. $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

7.24. $y=\dfrac{27-2x^3}{6x^2}$.

7.25. $y=\dfrac{x^2}{(x+4)^2}$.

7.26. $y=\dfrac{2x^2+3x-5}{x-4}$.

7.27. $y=\dfrac{x^2-3x-18}{x-9}$.

7.28. $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

7.29. $y=\dfrac{x^3-x^2}{(x+1)^2}$.

7.30. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

7.31. $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$.

7.32. $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$.

7.33. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

7.34. $y=e^{2x-x^2}$.

7.35. $y=x\,e^{-x}$.

7.36. $y=\dfrac{e^x}{x+1}$.

7.37. $y=(x+1)e^{\frac{1}{x}}$.

7.38. $y=(x-2)e^{\frac{9}{x}}$.

7.39. $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$.

7.40. $y=x\,e^{-x^2}$.

7.41. $y=x^2\,e^{-x^2}$.

7.42. $y=x\ln x$.

7.43. $y=x^2\ln x$.

7.44. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

7.45. $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

7.46. $y=x+\operatorname{arctg}x$.

7.47. $y=x-\operatorname{arctg}2x$.

Ответы к главе 3

§1

1.1. $\frac{3}{2}$. **1.2.** $-\frac{2}{9}$. **1.3.** $\frac{25}{9}$. **1.4.** 64. **1.5.** 2.

1.6. 9. **1.7.** $\sqrt{2}$. **1.8.** -3. **1.9.** 3. **1.10.** $\frac{1}{8}$.

1.11. $-\frac{15}{2}$. **1.12.** $\frac{1}{6}$. **1.13.** 4. **1.14.** 1. **1.15.** $\frac{1}{9}$.

1.16. 8. **1.17.** 0. **1.18.** 1. **1.19.** $\frac{1}{2}$. **1.20.** $\frac{4}{3}$.

1.21. -2. **1.22.** -4. **1.23.** 6. **1.24.** $\frac{5}{4}$. **1.25.** $-\frac{1}{6}$.

1.26. 2. **1.27.** $-\frac{4}{\sqrt{2}}$. **1.28.** $\frac{1}{2}$. **1.29.** $\frac{1}{3}$. **1.30.** 0.

1.31. 0. **1.32.** e^5. **1.33.** e^{-2}. **1.34.** $\frac{1}{2}$. **1.35.** $\frac{2}{3}$.

1.36. e^{-3}. **1.37.** $e^{\frac{1}{2}}$. **1.38.** -5. **1.39.** ∞. **1.40.** 0.

1.41. $\frac{1}{4}$. **1.42.** $\frac{3}{2}$. **1.43.** $\frac{4}{3}$. **1.44.** $-\frac{4}{3}$. **1.45.** $\frac{2}{3}$.

1.46. -12. **1.47.** 1. **1.48.** $\frac{5}{3}$. **1.49.** 5. **1.50.** $\frac{1}{3}$.

1.51. 0. **1.52.** ∞. **1.53.** 1. **1.54.** -1. **1.55.** 1.

1.56. 5. **1.57.** $\frac{13}{8}$. **1.58.** -1. **1.59.** $\frac{1}{3}$. **1.60.** -1.

1.61. 1. **1.62.** $\frac{1}{4}$. **1.63.** $-\frac{1}{8}$. **1.64.** $\frac{1}{4}$. **1.65.** 2.

1.66. $+\infty$. **1.67.** 3. **1.68.** $-\frac{3}{2}$. **1.69.** -3. **1.70.** $\frac{3}{19}$.

1.71. 0. **1.72.** $\frac{2}{3}$. **1.73.** 8. **1.74.** 0. **1.75.** e^2.

1.76. **а)** x^2; **б)** x^3; **в)** x^4. **г)** x^6; **д)** x^3; **е)** x^2; **ж)** x^2; **з)** x^2.

1.77. **а)** $\frac{1}{4}$; **б)** $-\frac{1}{2}$; **в)** $-\frac{1}{3}$; **г)** $-\frac{2}{9}$. **1.79.** $\frac{1}{2}$. **1.80.** $-\frac{4}{25}$.

1.81. 4. **1.82.** -1. **1.83.** $-\frac{1}{2}$. **1.84.** 2. **1.85.** 1.

1.86. $\frac{2}{3}$. **1.87.** 1. **1.88.** $\frac{1}{6}$. **1.89.** $\frac{1}{18}$. **1.90.** -6.

1.91. $-\frac{1}{6}$. **1.92.** $-\frac{1}{8}$. **1.93.** $-\frac{8}{25}$. **1.94.** $-\frac{e}{2}$. **1.95.** $-\frac{4}{3}$.

1.96. $\frac{1}{5}$. **1.97.** 6. **1.98.** 3. **1.99.** $\frac{3}{2}$. **1.100.** $e^{-\frac{2}{3}}$.

1.101. e^{10}. **1.102.** $e^{\frac{3}{2}}$. **1.103.** $e^{\operatorname{ctg} 3}$. **1.104.** $e^{-\frac{1}{8}}$. **1.105.** e^{-2}.

1.106. $e^{\frac{1}{4}}$. **1.107.** $e^{-\frac{2}{3}}$. **1.108.** e^2. **1.109.** e^{10}. **1.110.** e^{-8}.

1.111. $e^{-1/3}$. **1.112.** e^6. **1.113.** e^3. **1.114.** e^{-10}. **1.115.** e^2.

§ 2

2.1. **а)** $\cos x$; **б)** $\sin a$; **в)** $9\ln 3$; **г)** $2\ln 2$; **д)** $-\dfrac{\sin(2\operatorname{tg} x)}{2\cos^2 x}$;

е) $f'\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{-2} = f'(1)\cdot 2 = 10$;

ж) $\left(f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{-2}\right):4 = 2$.

2.2. $2x^2 - \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{2}{5x\sqrt{x}}$. **2.3.** $6x^2\ln x + 2x^2$.

2.4. $\dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$. **2.5.** $\dfrac{-12x^5+45x^4-72x^3+2x^2+4x-11}{(3x^4+x+1)^2}$.

2.6. $\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$.

2.7. $\dfrac{x^3(-4\ln x+10\sin x+2)+x^2(30\cos x-6)+5\sin x+\ln x+1}{(2x^3+1)^2}$.

2.8. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **2.9.** $\dfrac{5}{11}(6+5\sqrt{2x})^{-10/11}(2x)^{-1/2}$.

2.10. $-2\dfrac{x^2}{1-x^6}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$. **2.11.** $4(3+2x^4-5x^3)^3(8x^3-15x^2)$.

2.12. $\dfrac{1}{3}(6x^2+1)(2x^3+x+3)^{-2/3}$.

2.13. $(4x^{3/2}+6\sqrt{x}-1)/(2x^{5/2}+6x^{3/2}-2x)$. **2.14.** $(1+x^2)^{-1/2}$.

2.15. $3\sin 6x$. **2.16.** $192\dfrac{\log_2^2(2x+2)}{(x+1)\ln 2}$.

2.17. $e^{x\ln(3x+1)}\left(\ln(3x+1)+\dfrac{3x}{3x+1}\right)$. **2.18.** $-2\dfrac{x}{1-x^4}\cdot\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$.

2.19. $-4\ln(1+\cos 2x)\cdot\dfrac{1}{1+\cos 2x}\cdot\sin 2x$.

2.20. $\dfrac{1}{2}(\ln(x^2+\cos x))^{-1/2}\cdot\dfrac{1}{x^2+\cos x}\cdot(2x-\sin x)$.

2.21. $-4\sin(4x^2\ln x)\cdot(2x\ln x+x)$. **2.22.** $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\arcsin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

2.23. $\dfrac{1}{2}e^{\sqrt{(x^2+x)\sin x}}((x^2+x)\sin x)^{-1/2}(x^2\cos x+x(2\sin x+\cos x)+\sin x)$.

2.24. $x^3(3x-7x^2)^3(-77x+21)$.

2.25. $(12x^3-5)\ln(x+\sqrt{x})+(3x^4-5x)\cdot(2\sqrt{x}+1)\cdot\dfrac{1}{2x^{3/2}+2x}$.

2.26. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-6x\right)\operatorname{arctg}(2x^3)+(\sqrt{1+x^2}-3x^2)6x^2\cdot\dfrac{1}{1+4x^6}$.

2.27. $e^{x^2}(2x\sqrt{x^3+4x^2-7}+(1{,}5x^2+4x)(x^3+4x^2-7)^{-1/2})$.

2.28. $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$. **2.29.** $\dfrac{9}{5}\dfrac{1}{(2-\sin x)^4}\cos x$.

2.30. $8\sin 4x\cdot\dfrac{1}{(1+\cos 4x)^2}$. **2.31.** $(1-x^2)\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

2.32. $((1-x^2)\operatorname{arctg} x+x)\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$. **2.33.** $-3x(x^2+1)^{-5/2}$.

2.34. $(1-3x^2)(1+x^2)^{-2}(1-x^2)^{-1/2}$.

2.35. $y'=\Big(4\ln(x^2+x+2)\cdot e^{4x}(1+e^{8x})^{-1/2}-$

$-\ln(e^{4x}+\sqrt{1+e^{8x}})\cdot(2x+1)\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}\Big)\cdot\ln^{-2}(x^2+x+1)$.

2.36. $\dfrac{1}{2x^2+2x}$. **2.37.** $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\cdot\dfrac{4x^2+4x^{3/2}+1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^2}$.

+**2.38.** $3e^{3x}\dfrac{1}{2e^{6x}+2e^{3x}}$. **2.39.** $2x\arcsin\sqrt{1-x^2}-x|x|(1-x^2)^{-1/2}$.

2.40. $x^{\sqrt{2+\sin^2(3x)}}\big(\sin^2(3x)+1{,}5x\ln x\cdot\sin(6x)+2\big)(2+\sin^2(3x))^{-1/2}$.

2.41. $(x^2+1)^x\Big(2x^2\dfrac{1}{x^2+1}+\ln(x^2+1)\Big)$.

2.42. $(x+1)^{\operatorname{tg}x}\Big(\ln(x+1)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{tg}x\cdot\dfrac{1}{x+1}\Big)$.

2.43. $(3x^2+3x-2)^{\operatorname{tg}x}\Big((6x+3)\cdot\operatorname{tg}x\cdot\dfrac{1}{3x^2+3x-2}+\ln(3x^2+3x-2)\cdot\cos^{-2}x\Big)$.

2.44. $\dfrac{1}{2}e^{x^2}\cos^{\sqrt{x}}(x)\big(4x^{3/2}-2x\cdot\operatorname{tg}x+\ln\cos x\big)x^{-1/2}$.

2.45. $x\cdot\operatorname{tg}^{3x-2}x\cdot(3x\ln\operatorname{tg}x+x(3x-2)\operatorname{ctg}x\cos^{-2}x+2)$.

2.46. **а)** Неизвестно; **б)** c. **2.47.** **а)** Неизвестно; **б)** $\alpha\cdot\beta$.

2.48. **а)** 125; **б)** $8748=(3\cdot 9^2)\cdot(3\cdot 2^2)\cdot(3\cdot 1^2)$.

2.49. $3^x\ln 3$. **2.50.** $h(x)$. **2.51.** $f(2)=2^{3\pi}+1$; $f'(2)=3\pi 2^{3\pi-1}$.
(*Указание*: найдите сначала функции $g(x)$ и $h(x)$ отдельно.)

2.52. **а)** $a=-2$, $b=3$; **б)** $a=1$, $b=0{,}5$. **2.53.** **а)** 3; **б)** -1.

2.54. **а)** 4; **б)** -3. **2.55.** **а)** $y_B-y_A=k\cdot(x_B-x_A)=3\cdot 5=15$; **б)** 250.

2.56. 40.

2.57. $y=x-1$, $y=5x-9$.

2.58. **а)** $(2;4)$; **б)** $\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$; **в)** $(-1;1)$ и $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{16}\right)$.

2.59. $3x+y+6=0$. **2.60.** $x+25y=0$.

2.61. **а)** $y''=6(5x^4+6x^2+1)$; **б)** $y''=2e^{x^2}(2x^3+3x)$;

в) $y''=-9(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}$; **г)** $y'''=4\sin 2x$;

д) $y^{(5)}=120(1-x)^{-6}$; **е)** $y^{(4)}=\dfrac{6}{x}$; **ж)** $y^{(5)}=3^{2x+5}2^5\ln^5 3$;

з) $y^{(5)}=\dfrac{24+4x^2}{x^5}$; **и)** $y^{(n)}=(-1)^{n+1}\dfrac{2^n(n-1)!}{(2x+4)^n}$;

к) $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$; **л)** $y^{(n)}=3^n\sin\Big(3x+1+\dfrac{\pi n}{2}\Big)$.

2.62. -6. **2.63.** $4^{-\sin x}(\ln^2 4\cos^2 x+\ln 4\sin x)$.

§ 3

3.1. **а)** $y=-2{,}5x+13$; **б)** $y=3x+9$; **в)** $y=-x+2$; **г)** $y=-6x-22$;
д) $y=-x+1$; **е)** $y=x+2$; **ж)** $y=-x+2$; **з)** $y=2x-3$.

3.2. **а)** $y''_{xx}=-\dfrac{2}{9t^4}$; **б)** $y''_{xx}=-\dfrac{1}{4\sin^4(t/2)}$; **в)** $y''_{xx}=\dfrac{6}{t}\left(\dfrac{1+t^3}{2-t^3}\right)^3$;

г) $y''_{xx}=\dfrac{2(1+t)^3}{te^t}$; **д)** $y''_{xx}=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$; **е)** $y''_{xx}=-\dfrac{2t^6}{(1+t^2)^3}$.

3.3. **а)** 2 (t^2-t при $t=2$); **б)** 5 ($10\cos t$ при $t=\dfrac{\pi}{3}$).

3.4. **а)** 3; **б)** −1; **в)** 3; **г)** −1.

3.5. **а)** $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$; **б)** $y=-3x+7$; **в)** $y=-x+2$.

3.6. **а)** $y=4x-7$; **б)** $y=\dfrac{1}{7}x+\dfrac{13}{7}$; **в)** $y=2x-1$; **г)** $y=-5x+11$.

3.7. **а)** $y''_{xx}=-\dfrac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$; **б)** $y''_{xx}=\dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$;

в) $y''_{xx}=-\dfrac{3+2\ln x}{x^2(1+2\ln x)^2}$; **г)** $y''_{xx}=\dfrac{32}{(x-y)^3}$;

д) $y''_{xx}=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; **е)** $y''_{xx}=0$.

3.8. **а)** −3; **б)** 8.

§4

4.1. **а)** $d^2y=(1-3x+x^2)e^{-x}\,dx^2$; **б)** $d^2y=32\sin 4x\cos^{-3}4x\,dx^2$;

в) $d^2y=-\dfrac{2\sin\ln x}{x}\,dx^2$; **г)** $d^2y=-\left(\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}+\dfrac{x}{1-x^2}\right)dx^2$.

4.2. **а)** $d^2y=-\dfrac{1}{3}\,dx^2$; **б)** $d^2y=-\dfrac{1}{4}\,dx^2$; **в)** $d^2y=0$; **г)** $d^2y=\dfrac{3}{8}\,dx^2$.

4.3. **а)** −4,98; **б)** 4,99; **в)** −5,01; **г)** −3,02.

4.4. **а)** 32,08; **б)** 0,96; **в)** 1,03; **г)** 26,073;

д) −4,98; **е)** 2,98; **ж)** 1,06; **з)** 1,2.

4.5. **а)** 1,075; **б)** 1,995; **в)** 1,007; **г)** $4\dfrac{74}{75}$; **д)** 2,995; **е)** 0,805.

4.6. 2,94 руб. **4.7.** 565,2 см^3. **4.8.** $k=a\,f'(x)$. **4.9.** $k=-a\,f'(2x)$.

4.10. $\dfrac{k}{a}$.

§5

5.1. $f(x)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}(x+3)-\dfrac{1}{27}(x+3)^2-\dfrac{1}{81}(x+3)^3+o((x+3)^3)$.

5.2. $f(x)=-1-(x-1)-(x-1)^2-(x-1)^3-(x-1)^4+o((x-1)^4)$.

5.3. $f(x)=1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$.

5.4. **а)** $f(x)=1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$; **б)** $f(x)=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)$.

5.5. **а)** $P''(10)=2$; **б)** $P'''(11)=12$; **в)** 143.

5.6. $a=1$, $b=1$.

5.7. **а)** $4x^4$; **б)** $2x^6$; **в)** $4x^5$; **г)** $-x^4$.

5.8. **а)** $4x^6$; **б)** $-\dfrac{4}{3}x^3$; **в)** $-\dfrac{8}{3}x^3$; **г)** $\dfrac{32}{3}x^3$.

5.9. **а)** $f(x)\approx 4x^3$, 0,5; **б)** $f(x)\approx -3x^2$, −0,27;

в) $f(x)\approx -\dfrac{1}{2}x^4$, $-\dfrac{1}{32}$; **г)** $f(x)\approx -x^2$, −0,04.

5.10. **а)** $f(x)\approx 2x^4,\ \frac{1}{8}$; **б)** $f(x)\approx -\frac{1}{4}x^4,\ -\frac{1}{64}$;
в) $f(x)\approx 2x^2$, 0,32; **г)** $f(x)\approx 2x^6,\ \frac{1}{32}$.

5.11. **а)** $f(x)=x-x^3-\frac{x^4}{2}+o(x^4),\ f^{(4)}(0)=-12$;
б) $f(x)=\frac{2}{3}x^4+o(x^4),\ f^{(4)}(0)=16$;
в) $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+o(x^4),\ f^{(4)}(0)=6$.

5.12. **а)** $12f''(x_0)\Delta x^2$; **б)** $15f''(x_0)\Delta x^2$;
в) $12f''(x_0)\Delta x^2$; **г)** $42f''(x_0)\Delta x^2$.

5.13. **а)** $y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$; **б)** $y=e^2x+\frac{e^2}{2}$; **в)** $y=x-4{,}5$;
г) $y=x+2$ при $x\to+\infty$; $y=-x+2$ при $x\to-\infty$.

§6

6.1. 0. **6.2.** $\frac{1}{3}$. **6.3.** $\frac{3}{2}$. **6.4.** $\frac{3}{2}$. **6.5.** $\frac{1}{3}$.

6.6. 0. **6.7.** 0. **6.8.** 0. **6.9.** $-\frac{1}{2}$. **6.10.** -4.

6.11. 2. **6.12.** $\frac{1}{2}$. **6.13.** $\frac{9}{50}$. **6.14.** $-\frac{4}{3}$. **6.15.** $\frac{2}{3}$.

6.16. 0. **6.17.** 2. **6.18.** $-\frac{1}{12}$. **6.19.** $\frac{1}{3}$. **6.20.** $\frac{1}{3}$.

6.21. $-\frac{1}{4}$. **6.22.** $-\frac{3}{16}$. **6.23.** **а)** -6; **б)** -8.

§7

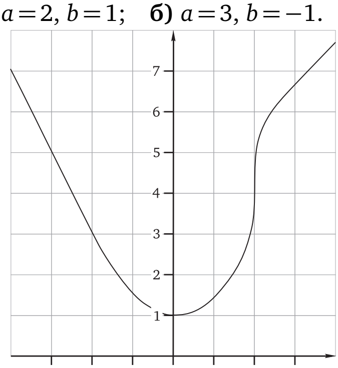
7.1. **а)** 16; **б)** 688; **в)** 58; **г)** $y_{\min}=-3,\ y_{\max}=5$;
д) $y_{\min}=-8,\ y_{\max}=7$; **е)** $y_{\min}=-15,\ y_{\max}=9$.

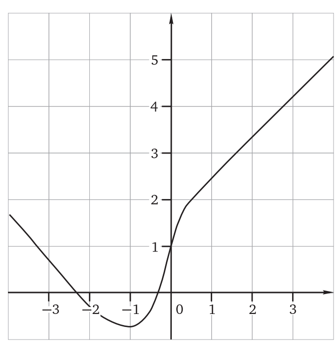
7.2. $x=2$ ($x=4$ точка максимума). **7.3.** $x=-5$ ($x=3$ точка минимума).

7.4. $f(2)\in(-1;5)$. **7.5.** $f(-1)\in(-4;2)$.

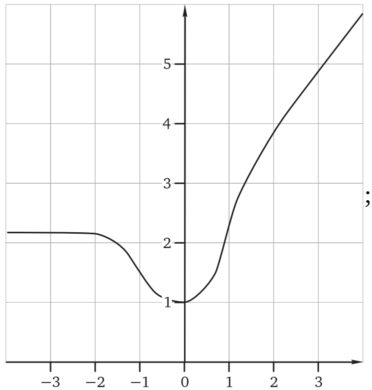
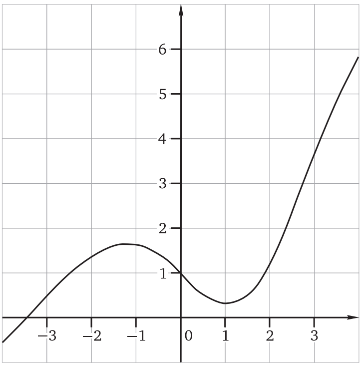
7.6. **а)** 12 ($5+7,\ y=2x+3,\ x=1,\ x=2$);
б) 18 ($15+3,\ y=-2x+7,\ x=-4,\ x=2$).

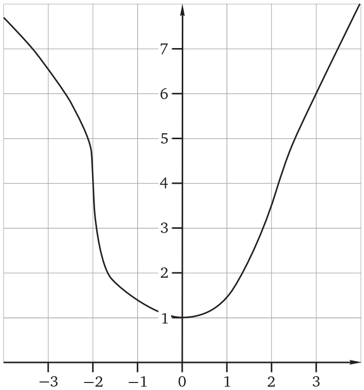
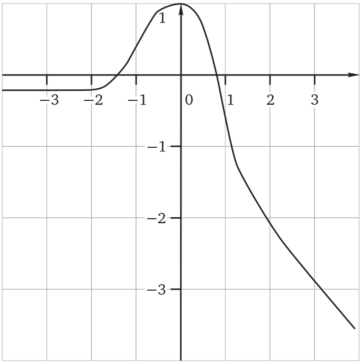
7.7. **а)** $a=2,\ b=1$; **б)** $a=3,\ b=-1$.

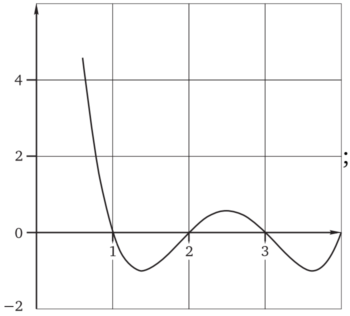
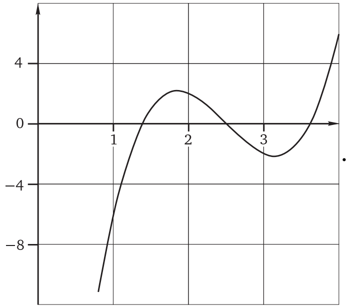
7.8. **а)**


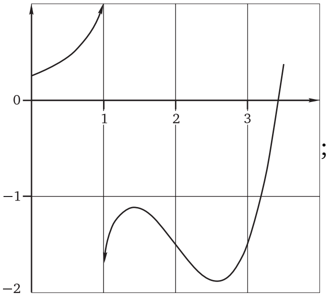
; **б)**


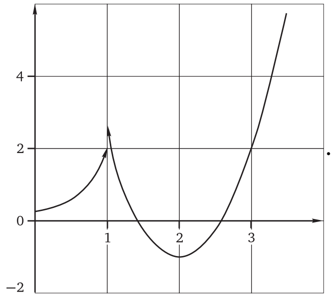
;

в) 
5
4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
; г) 
6
5
4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
;

д) 
7
6
5
4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
; е) 
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2
−3
.

7.9. а) 
4
2
0
−2
1
2
3
; 
4
0
−4
−8
1
2
3
.

б) 

; 

.

7.10. $y' = 3x(x-2)$, $y'' = 6x - 6$, точка минимума $x = 2$, точка максимума $x = 0$, точка перегиба при $x = 1$.
7.11. $y' = (3x+5)(x-1)$, $y'' = 6x + 2$, точка минимума $x = 1$, точка максимума $x = -\frac{5}{3}$, точка перегиба при $x = -\frac{1}{3}$.
7.12. $y' = 2x(2x^2+3x+1)$, $y'' = 12x^2 + 12x + 2$, точка минимума $x = -1$, $x = 0$, точка максимума $x = -\frac{1}{2}$, точки перегиба при $x = \frac{-6 \pm \sqrt{3}}{6}$.
7.13. $y' = (x-2)^2(4x-2)$, $y'' = 12x^2 - 36x + 24$, точка минимума $x = \frac{1}{2}$, точки перегиба при $x = 1$ и $x = 2$.
7.14. $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $y'' = \frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, точка минимума $x = -1$, точка максимума $x = 1$, точки перегиба при $x = \pm\sqrt{3}$, $x = 0$.
7.15. $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $x = 0$ — вертикальная асимптота, $y' = 30\frac{x-1}{x^7}$, $y'' = 30\frac{7-6x}{x^8}$, точка минимума $x = 1$, точка перегиба при $x = \frac{7}{6}$.
7.16. $y = -4x + 1$ — наклонная асимптота, $x = 2$ — вертикальная асимптота, $y' = -4 - \frac{4}{(x-2)^5}$, $x_{\min} = 1$, $y(1) = -2$, $y'' = \frac{20}{(x-2)^6}$.
7.17. $y = -5x + 4$ — наклонная асимптота, $x = 1$ — вертикальная асимптота, $y' = \frac{5}{(x-1)^6} - 5$, $x_{\max} = 2$, $y(2) = -7$, $x_{\min} = 0$, $y(0) = 5$, $y'' = -\frac{30}{(x-1)^7}$.
7.18. $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $x = 1$ — вертикальная асимптота, $y' = \frac{-x^4 - 2x}{(x^3-1)^2}$, $y'' = 2\frac{x^6 + 7x^3 + 1}{(x^3-1)^3}$, точка минимума $x = -\sqrt[3]{2}$, точка максимума $x = 0$, точки перегиба при $x = \sqrt[3]{\frac{-7 \pm 3\sqrt{2}}{2}}$.
7.19. $y = 2x - \frac{1}{2}$ — наклонная асимптота, $y' = \frac{4x^2 + 8x + 3}{2(x+1)^2}$, $y'' = \frac{1}{(x+1)^3}$, точка минимума $x = -\frac{1}{2}$, точка максимума $x = -\frac{3}{2}$.

7.20. $y=x$ — наклонная асимптота, $x=0$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x^3-8}{x^3}$, $y''=\dfrac{24}{x^4}$, точка минимума $x=2$.

7.21. $y=x$ — наклонная асимптота, $x=\pm 2$ — вертикальные асимптоты, $y'=\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$, $y''=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, точка минимума $x=2\sqrt{3}$, точка максимума $x=-2\sqrt{3}$, точка перегиба при $x=0$.

7.22. $y=x$ — наклонная асимптота, $y'=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$, $y''=\dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, точка перегиба при $x=0;\ \pm\sqrt{3}$.

7.23. $y=x+4$ — наклонная асимптота, $x=2$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$, $y''=\dfrac{24x}{(x-2)^4}$, точка минимума $x=6$, точка перегиба при $x=0$.

7.24. $y=-\dfrac{1}{3}x$ — наклонная асимптота, $x=0$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{-x^3-27}{3x^3}$, $y''=\dfrac{27}{x^4}$, точка минимума $x=-3$.

7.25. $y=1$ — горизонтальная асимптота, $x=-4$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{8x}{(x+4)^3}$, $y''=\dfrac{16(2-x)}{(x+4)^4}$, точка минимума $x=0$, точка перегиба при $x=2$.

7.26. $y=2x+11$ — наклонная асимптота, $x=4$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{2x^2-16x-7}{(x-4)^2}$, $y''=\dfrac{78}{(x-4)^3}$, точка минимума $x=\dfrac{8+\sqrt{78}}{2}$, точка максимума $x=\dfrac{8-\sqrt{78}}{2}$.

7.27. $y=x+6$ — наклонная асимптота, $x=9$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x^2-18x+45}{(x-9)^2}$, $y''=\dfrac{72}{(x-9)^3}$, точка минимума $x=15$, точка максимума $x=3$.

7.28. $y=x-3$ — наклонная асимптота, $x=-1$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$, $y''=\dfrac{12x^2}{(x+1)^5}$, точка минимума $x=0$, точка максимума $x=-4$.

7.29. $y=x-3$ — наклонная асимптота, $x=-1$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}$, $y''=\dfrac{10x-2}{(x+1)^4}$, точка минимума $x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$, точка максимума $x=0$, $x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, точка перегиба при $x=\dfrac{1}{5}$.

7.30. $y=x+5$ — наклонная асимптота, $x=1$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, $y''=\dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$, точка минимума $x=5$, точка перегиба при $x=-1$.

7.31. $y=1$ — горизонтальная асимптота, $x=1$ — вертикальная асимптота, $y'=-8\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^5}$, $y''=16\dfrac{(x+1)^2(x+4)}{(x-1)^6}$, точка минимума $x=-1$, точка перегиба при $x=-4$.

7.32. $y=x$ — наклонная асимптота, $x=-1$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x^6+4x^3}{(x^3+1)^2}$, $y''=-6\dfrac{x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$, точка максимума $x=-\sqrt[3]{4}$, точка минимума $x=0$, точка перегиба при $x=\sqrt[3]{2}$.

7.33. $x=\pm1$ — вертикальные асимптоты, $y'=\dfrac{x^2-3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$, $y''=\dfrac{2x(9-x^2)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$, точка минимума $x=\sqrt{3}$, точка максимума $x=-\sqrt{3}$, точки перегиба при $x=0;\ \pm3$.

7.34. $y=0$ — горизонтальная асимптота, $y'=2(1-x)e^{2x-x^2}$, $y''=2(2x^2-4x+1)e^{2x-x^2}$, max: $x=1$, точки перегиба при $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

7.35. $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$, $y'=(1-x)e^{-x}$, $y''=(x-2)e^{-x}$, max: $x=1$, точка перегиба при $x=2$.

7.36. $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$, $x=-1$ — вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, $y''=\dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$, точка минимума $x=0$.

7.37. $y=x+2$ — наклонная асимптота, $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to0+0$, $y'=\left(\dfrac{x^2-x-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $y''=\left(\dfrac{3x+1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}}$, точка минимума $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, max: $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, точка перегиба при $x=-\dfrac{1}{3}$.

7.38. $y=x+7$ — наклонная асимптота, $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to0+0$, $y'=\left(\dfrac{x^2-9x+18}{x^2}\right)e^{\frac{9}{x}}$, $y''=\left(\dfrac{45x-144}{x^4}\right)e^{\frac{9}{x}}$, точка минимума $x=6$, точка максимума $x=3$, точка перегиба при $x=3{,}2$.

7.39. $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to0+0$, $y'=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$, $y''=\left(\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$, точка минимума $x=\dfrac{1}{2}$.

7.40. $y=0$ — горизонтальная асимптота, $y'=(1-2x^2)e^{-x^2}$, $y''=(4x^3-6x^2)e^{-x^2}$, точка минимума $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точка максимума $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точки перегиба при $x=0;\ \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

7.41. $y=0$ — горизонтальная асимптота, $y'=2(x-x^3)e^{-x^2}$, $y''=2(2x^4-5x^2+1)e^{-x^2}$, точка минимума $x=0$, точка максимума $x=\pm1$, точки перегиба при $x=\pm\sqrt{\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}}$.

7.42. $y'=\ln x+1$, $y''=\dfrac{1}{x}$, точка минимума $x=\dfrac{1}{e}$.

7.43. $y'=x(2\ln x+1)$, $y''=2\ln x+3$, точка минимума $x=e^{-\frac{1}{2}}$, точка перегиба при $x=e^{-\frac{3}{2}}$.

7.44. $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$, $x=0$ — вертикальная асимптота при $x\to 0+0$, $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $y''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$, точка максимума $x=e$, точка перегиба при $x=e^{3/2}$.

7.45. $y'=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y''=\dfrac{10x+2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, точка минимума $x=\dfrac{2}{5}$, точка максимума $x=0$, точка перегиба при $x=-\dfrac{1}{5}$.

7.46. $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x\to+\infty$, $y=x-\dfrac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x\to-\infty$, $y'=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$, $y''=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, точка перегиба при $x=0$.

7.47. $y=x-\dfrac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x\to+\infty$, $y=x+\dfrac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x\to-\infty$, $y'=\dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}$, $y''=\dfrac{16x}{(4x^2+1)^2}$, точка минимума $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точка максимума $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точка перегиба при $x=0$.

Глава 4

Интеграл

Справочный материал и примеры решения задач

1. Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ 2. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a \neq 0$

3. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2. Таблица первообразных элементарных функций

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, \quad a \neq 0$

3. Метод замены переменной.

Данный метод имеет две основные модификации, которые мы проиллюстрируем на следующих примерах.

1. *Метод подведения под знак дифференциала.*

Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos x\, dx$.

Решение.

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x\, (\sin x)'\, dx = \int \sin^3 x\, d\sin x = \{u = \sin x\} = \\ = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

2. *Метод подстановки.*

Вычислить интеграл $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$.

Решение. Выполним подстановку $x = u^2$, $dx = 2u\, du$, $u = \sqrt{x}$.

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{(1+u^2)^2 u}{1+u}\, du = \\ = 2\int \frac{u^3+u}{1+u}\, du = 2\int \left(u^2 - u + 2 - \frac{2}{1+u}\right) du = \\ = 2\int (u^2 - u + 2)\, du - 4\int \frac{1}{1+u} du = \\ = \frac{2u^3}{3} - u^2 + 4u - 4\ln|1+u| + C = \\ = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

4. Метод интегрирования по частям.

В основе данного метода лежит формула

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx.$$

Вычислим следующий интеграл с помощью данного метода.

$$\int 2x^2 \ln 3x\, dx = \int \left(\frac{2x^3}{3}\right)' \ln(3x)\, dx = \left(\frac{2x^3}{3}\right) \ln 3x - \int \left(\frac{2x^3}{3}\right) \frac{1}{x}\, dx = \\ = \frac{2x^3 \ln 3x}{3} - \frac{2}{3}\int x^2\, dx = \frac{2x^3 \ln 3x}{3} - \frac{2x^3}{9} + C.$$

Формулу интегрирования по частям также используют и в следующем виде:

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x) v(x) - \int v(x)\, du(x).$$

Рассмотрим ее применение при вычислении предыдущего интеграла:

$$\int 2x^2 \ln 3x\,dx = \int \ln 3x\,d\left(\frac{2x^3}{3}\right) = \left(\frac{2x^3}{3}\right)\ln 3x - \int\left(\frac{2x^3}{3}\right)d\ln 3x =$$
$$= \left(\frac{2x^3}{3}\right)\ln 3x - \int\left(\frac{2x^3}{3}\right)\frac{1}{x}\,dx = \frac{2x^3\ln 3x}{3} - \frac{2}{3}\int x^2\,dx =$$
$$= \frac{2x^3\ln 3x}{3} - \frac{2x^3}{9} + C.$$

§ 1. Неопределенный интеграл

1.1. Вычислив производную $(\cos x^5)'$, найдите $\int x^4 \sin x^5\,dx$.

1.2. Вычислив производную $(\ln(1-x^4))'$, найдите $\int \frac{x^3}{1-x^4}\,dx$.

Найдите неопределенные интегралы (1.3—1.53).

1.3. $\int\left(x^4 + 3\sqrt[5]{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx.$

1.4. $\int\left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx.$

1.5. $\int \frac{5x^8+1}{x^4}\,dx.$

1.6. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx.$

1.7. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$

1.8. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

1.9. $\int \sqrt[3]{3-7x}\,dx.$

1.10. $\int \frac{6x-1}{\sqrt{1-3x}}\,dx.$

1.11. $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx.$

1.12. $\int \frac{1-3x}{3+2x}\,dx.$

1.13. $\int \frac{3\,\mathrm{arctg}^2\,x}{x^2+1}\,dx.$

1.14. $\int \frac{3\,\mathrm{tg}^2\,x}{\cos^2 x}\,dx.$

1.15. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx.$

1.16. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx.$

1.17. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$

1.18. $\int x^2\sqrt[5]{x^3-8}\,dx.$

1.19. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$

1.20. $\int \frac{e^{\mathrm{tg}\,x}}{\cos^2 x}\,dx.$

1.21. $\int \sqrt{3+\cos 5x}\,\sin 5x\,dx.$

1.22. $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4}\,dx.$

1.23. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx.$

1.24. $\int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x}\,dx.$

1.25. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

1.26. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

1.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.

1.28. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}$.

1.29. $\int \frac{2\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1.30. $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx$.

1.31. $\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x}$.

1.32. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

1.33. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

1.34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$.

1.35. $\int x\sin 3x\,dx$.

1.36. $\int x^2\sin x\,dx$.

1.37. $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx$.

1.38. $\int (x+1)e^{-x}\,dx$.

1.39. $\int (x+1)\cos 3x\,dx$.

1.40. $\int (6x+3)\cos 2x\,dx$.

1.41. $\int (2x+2)e^{2x}\,dx$.

1.42. $\int x^2e^{-x}\,dx$.

1.43. $\int x^2\cos x\,dx$.

1.44. $\int (3x+1)\sin 5x\,dx$.

1.45. $\int (2x+3)\cos 3x\,dx$.

1.46. $\int (2x+5)e^{3x}\,dx$.

1.47. $\int (2x+3)\ln x\,dx$.

1.48. $\int (4x^3+x^2)\ln x\,dx$.

1.49. $\int (4x^3+6x-7)\ln x\,dx$.

1.50. $\int x\ln(3x+2)\,dx$.

1.51. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

1.52. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

1.53. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$.

1.54. Найдите первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через заданную точку M. Используйте указанную замену переменной:

а) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -1\right)$, $\frac{1}{x^2}-1=t^2$;

б) $f(x)=\frac{1}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}$, $M(1;1)$, $\frac{2}{x^3}-1=t^3$;

в) $f(x)=\frac{1}{x^2\cdot\sqrt{1+x^2}}$, $M(1;0)$, $\frac{1}{x^2}+1=t^2$;

г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$, $M(1;0)$, $\frac{4}{x^2}+1=t^{\frac{2}{3}}$.

1.55. Известно, что $\int \frac{\pi^{3/2}\cos x}{x^2+\pi^2}\,dx = F(x)+C$ и $g(x)=F(x^2)$. Найдите $g'(\sqrt{\pi})$.

1.56. Известно, что $\int \frac{5^x}{x^2+9}\,dx = F(x)+C$ и $g(x)=F(x^2)$. Найдите $g'(2)$.

1.57. Известно, что $\int \frac{g(x)}{x^2+3x+2}\,dx = a\cdot G(x,b)+c\cdot G(x,d)+C$, где $G(x,x_0)$ — первообразная функции $\frac{g(x)}{x-x_0}$. Найдите a, b, c, d, если $b>d$.

1.58. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{f(x)}{x^2+x-6}\,dx$, если

$$\int \frac{f(x)}{x-a}\,dx = F(x;a)+C,$$

где $F(x;a)$ — заданная функция переменных x и a, $C=\text{const}$.

1.59. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{x\cdot f(x)}{x^2+x-6}\,dx$, если

$$\int \frac{f(x)}{x-a}\,dx = F(x;a)+C,$$

где $F(x;a)$ — заданная функция переменных x и a, $C=\text{const}$.

§ 2. Определенный интеграл

Вычислите определенные интегралы (2.1—2.19).

2.1. $\int\limits_1^3 x^3\,dx$.

2.2. $\int\limits_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$.

2.3. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$.

2.4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2.5. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

2.6. $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

2.7. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

2.8. $\int\limits_{-2}^1 x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$.

2.9. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$.

2.10. $\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx$.

2.11. $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^5\,dx.$ **2.12.** $\int\limits_3^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^2}}.$

2.13. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{2x+1})\sqrt{2x+1}}.$ **2.14.** $\int\limits_1^{\sqrt[7]{2}} \frac{x^6\,dx}{1+(x^7-1)^2}.$

2.15. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1}.$ **2.16.** $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}.$

2.17. $\int\limits_0^1 \frac{x^3+1}{(x^4+4x+2)^2}\,dx.$ **2.18.** $\int\limits_1^e \frac{1+\ln^3 x}{x}\,dx.$

2.19. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

2.20. Сделайте рисунок и вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $y=3x-x^2$ и $y=-x$;
б) $y=x^2-2x+2$ и $y=2+4x-x^2$;
в) $y=2x^2-4x+3$ и $y=3+4x$;
г) $y=x^2$ и $y=2x-x^2$.

2.21. Выразите через определенный интеграл и найдите

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f'\left(\frac{5n+1}{n}\right)+f'\left(\frac{5n+2}{n}\right)+f'\left(\frac{5n+3}{n}\right)+\ldots+f'\left(\frac{6n}{n}\right)\right),$$

если функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную и $f(n)=$ $=n!$ при $\forall n\in\mathbb{N}$.

2.22. Выразите через определенный интеграл и найдите предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\sin\frac{k}{n}}\cdot\left(\sin\frac{k}{n}-\sin\frac{k-1}{n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{k\pi}{4n}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{k\pi}{4n}-\operatorname{tg}\frac{(k-1)\pi}{4n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \left(\ln\frac{k}{n}\right)\cdot\left(\ln\frac{k}{n}-\ln\frac{k-1}{n}\right)$.

2.23. Функция $f(x)$ непрерывна на указанном отрезке и $F'(x)=$ $=f(x)$. Чему равен определенный интеграл:

а) $\int\limits_3^7 f(2x+1)\,dx$, $[0;\,15]$; **б)** $\int\limits_2^4 f(3x-2)\,dx$, $[0;\,11]$;

в) $\int\limits_1^3 f(4x+2)\,dx$, $[-1;\,19]$; **г)** $\int\limits_2^5 f(3x-4)\,dx$, $[-1;\,19]$?

2.24. Известно, что $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 3x\cdot f(\cos 3x)\,dx=-1$. Найдите $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

2.25. Пусть $\int f(x)\,dx=F(x)+C$. Найдите

а) $\int\limits_0^2 f(\ln(2x+1))\dfrac{1}{(2x+1)}\,dx$; **б)** $\int\limits_{-2}^2 f(x^3)x^2\,dx$;

в) $\int\limits_{0,5}^1 f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{dx}{x^3}$; **г)** $\int\limits_0^{\pi/2} f(1+\sin 2x)\cos 2x\,dx$.

2.26. Найдите множество всех возможных значений $f(180)$, если:

а) $f(0)=0$ и $1\leqslant f'(x)\leqslant 2$ при всех $x\in[0;\,180]$;
б) $f(400)=500$ и $1\leqslant f'(x)\leqslant 2$ при всех $x\in[180;\,400]$;
в) $f(0)=0$, $f(400)=500$ и $1\leqslant f'(x)\leqslant 2$ при всех $x\in[0;\,400]$.

2.27. Найдите множество всех возможных значений $f(2)$, если $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и $1\leqslant f''(x)\leqslant 6x^2+1$ при всех $x\in[0;\,2]$.

2.28. Известно, что $F'(x)=f(x)$ и $G(x)$ — первообразная функции $\cos 2x\cdot f(\sin 2x)$. Найдите $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $F(0)=2$, $F(1)=3$ и $G(0)=2$.

2.29. Известно, что $G'(x)=\sin 3x\cdot f(\cos 3x)$ и $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Найдите $F(0)$, если $G(0)=2$, $G\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ и $F(1)=3$.

2.30. Известно, что $F'(x)=x^3g'(x)$ и $G'(x)=x^2g(x)$. Найдите $F(2)$, если $F(0)=1$, $g(0)=1$, $G(0)=1$, $g(2)=2$, $G(2)=2$.

2.31. Известно, что $F'(x)=\sin x\cdot g'(x)$ и $G'(x)=\cos x\cdot g(x)$. Найдите $F(\pi)$, если $F(0)=1$, $G(0)=1$, $G(\pi)=3$.

2.32. Функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[0;\,6]$. Найдите интервал $(A;\,B)$ возможных значений $I(f)=\int\limits_0^6 f(x)\,dx$ при указанных условиях и приведите графический пример функции $f(x)$

такой, чтобы:

$$1)\ I(f) \approx A; \quad 2)\ I(f) \approx B; \quad 3)\ I(f) = \frac{A+B}{2}.$$

а) $f(0)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=4$, $f(6)=5$ и f возрастает;
б) $f(0)=5$, $f(1)=4$, $f(3)=3$, $f(4)=2$, $f(6)=0$ и f убывает.

2.33. Найдите экстремумы функции

$$F(x) = \int\limits_a^x \frac{t^4-3t^3+2t^2}{g^2(t)+1}\,dt$$

($g(x)$ — непрерывная функция).

2.34. Известно, что $f(x)$ — непрерывная функция. Кроме того, $f(0)=2$, $f(1)=3$, $G(x)=\int\limits_a^{2x+1} f(t)dt$ и $G'(x)=g(x)$. Найдите $g(0)$.

2.35. Известно, что $f(x)$ — непрерывная функция. Кроме того, $f(2)=2$, $f(4)=3$, $G(x)=\int\limits_a^{x^2} f(t)dt$ и $G'(x)=g(x)$. Найдите $g(2)$.

2.36. Известно, что $G'(x)=\cos(x)\cdot g(x)$. Найдите $\int\limits_0^{\pi} \sin x\cdot g'(x)\,dx$, если $G(0)=1$, $G(\pi)=3$.

2.37. Найдите $\int\limits_1^3 x^2 f(x^3)\,dx$, если

$$\int\limits_1^3 f(x^3)\,dx = 3, \quad \int\limits_1^3 f(x)\,dx = 6 \quad \text{и} \quad \int\limits_3^{27} f(x)\,dx = 9.$$

2.38. Найдите $\int\limits_0^2 x\,f(4-x^2)\,dx$, если

$$\int\limits_0^2 f(4-x^2)\,dx = 2, \quad \int\limits_0^2 f(x)\,dx = 4 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^4 f(x)\,dx = 6.$$

2.39. Найдите $\int\limits_2^3 e^{-4t^2}dt$, если $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt = F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

2.40. Известно, что $G'(x)=x^2 g(x)$. Найдите $\int\limits_0^2 x^3 g'(x)\,dx$, если $g(0)=1$, $G(0)=1$, $g(2)=2$, $G(2)=2$.

2.41. Известно, что $G'(x)=\sin x\cdot g(x)$. Найдите $\int\limits_0^{\pi}\cos x\cdot g'(x)\,dx$, если $G(0)=1$, $G(\pi)=3$.

§ 3. Несобственный интеграл

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость (3.1—3.29).

3.1. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$. **3.2.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}$. **3.3.** $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3.4. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$. **3.5.** $\int\limits_0^{\infty}xe^{-x^2}\,dx$. **3.6.** $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4}\,dx$.

3.7. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+1}\,dx$. **3.8.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$. **3.9.** $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3x}$.

3.10. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$. **3.11.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^4\,dx}{(x^5+1)^4}$. **3.12.** $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx$.

3.13. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}\,dx$. **3.14.** $\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **3.15.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$.

3.16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. **3.17.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$. **3.18.** $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3.19. $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x}$. **3.20.** $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$. **3.21.** $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^2}$.

3.22. $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^p}$. **3.23.** $\int\limits_0^{3}\frac{dx}{(x-1)^2}$. **3.24.** $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.25. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$. **3.26.** $\int\limits_0^{2}\frac{x\,dx}{(x^2-1)^{4/5}}$. **3.27.** $\int\limits_0^{0{,}5}\frac{dx}{x\ln^2x}$.

3.28. $\int\limits_0^{1}\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **3.29.** $\int\limits_0^{1}x\ln x\,dx$.

Исследуйте сходимость несобственных интегралов (3.30—3.37).

3.30. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$. **3.31.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$. **3.32.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

3.33. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt{x}+1}$. **3.34.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4+x^3+1}$. **3.35.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}+x+1}$.

3.36. $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^2+1}$. **3.37.** $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

3.38. Известно, что $\Phi(x)=\int\limits_0^x f(t,0,1)\,dt$, где

$$f(x,a,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2},$$

и

$$\Phi(0{,}5)\approx 0{,}1915, \quad \Phi(1)\approx 0{,}3413,$$
$$\Phi(1{,}5)\approx 0{,}4332, \quad \Phi(2)\approx 0{,}4772,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 0{,}5.$$

Найдите параметры a или σ, если:

а) $\int\limits_{-\infty}^5 f(x,a,4)\,dx\approx 0{,}9332$; **б)** $\int\limits_2^\infty f(x;a;6)\,dx\approx 0{,}9772$;

в) $\int\limits_{-\infty}^2 f(x;6;\sigma)\,dx\approx 0{,}1587$; **г)** $\int\limits_2^\infty f(x;-2;\sigma)\,dx\approx 0{,}3085$.

Ответы к главе 4

§1

1.1. $-\frac{1}{5}\cos x^5 + C.$ **1.2.** $-\frac{1}{4}\ln|1-x^4| + C.$

1.3. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{2}x\sqrt[5]{x} - \frac{1}{x} + C.$ **1.4.** $2\operatorname{arctg} x - 3\arcsin\frac{x}{2} + C.$

1.5. $x^5 - \frac{1}{3x^3} + C.$ **1.6.** $x^3 + \operatorname{arctg} x + C.$

1.7. $x - \operatorname{arctg} x + C.$ **1.8.** $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + C.$

1.9. $-\frac{3}{28}(3-7x)^{4/3} + C.$ **1.10.** $\frac{4}{9}(1-3x)^{3/2} - \frac{2}{3}(1-3x)^{1/2} + C.$

1.11. $x + \ln|1+2x| + C.$ **1.12.** $-\frac{3}{2}x + \frac{11}{4}\ln|3+2x| + C.$

1.13. $\operatorname{arctg}^3 x + C.$ **1.14.** $\operatorname{tg}^3 x + C.$

1.15. $2\sqrt{\ln x} + C.$ **1.16.** $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} + C.$

1.17. $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C.$ **1.18.** $\frac{5}{18}(x^3-8)^{6/5} + C.$

1.19. $\frac{1}{2\cos^2 x} + C.$ **1.20.** $e^{\operatorname{tg} x} + C.$

1.21. $-\frac{2}{15}(3+\cos 5x)^{\frac{3}{2}} + C.$ **1.22.** $-\frac{1}{9(x^3+3x+1)^3} + C.$

1.23. $x - 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1)^2 + C.$ **1.24.** $\ln(2x\sqrt{x} + x) + C.$

1.25. $\sqrt{x^2+1} + C.$ **1.26.** $\frac{1}{2}\arcsin x^2 + C.$

1.27. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + C.$ **1.28.** $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3) + C.$

1.29. $\arcsin^2 x - \sqrt{1-x^2} + C.$ **1.30.** $-\frac{1}{2}e^{-(x^2+1)} + C.$

1.31. $-\cos\ln x + C.$ **1.32.** $\operatorname{arctg}(x+2) + C.$

1.33. $\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$ **1.34.** $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+8}\right) + C.$

1.35. $-\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$ **1.36.** $2x\sin x - x^2\cos x + 2\cos x + C.$

1.37. $(x+1)^2\sin x + 2(x+1)\cos x + C.$

1.38. $-(x+2)e^{-x} + C.$ **1.39.** $\frac{x+1}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C.$

1.40. $(3x+1{,}5)\sin 2x + 1{,}5\cos 2x + C.$ **1.41.** $(x+0{,}5)e^{2x} + C.$

1.42. $-(x^2+2x+2)e^{-x} + C.$ **1.43.** $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$

1.44. $\frac{3}{25}\sin 5x - \frac{1}{5}(3x+1)\cos 5x + C.$ **1.45.** $\frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$

1.46. $\frac{1}{9}e^{3x}(6x+13) + C.$ **1.47.** $(x^2+3x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 - 3x.$

1.48. $-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}(3x^4+x^3)\ln x + C.$

1.49. $(x^4+3x^2-7x)\ln x-\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3x^2}{2}+7x+C.$

1.50. $\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{9}\right)\ln(3x+2)-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{3}+C.$ **1.51.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C.$

1.52. $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{2}+C.$ **1.53.** $-\dfrac{\ln x}{2x^2}-\dfrac{1}{4x^2}+C.$

1.54. **а)** $-\dfrac{1}{3}t^3+C=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2}{3};$ **б)** $-\dfrac{1}{4}t^2+C=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{x^3}-1\right)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{5}{4};$

в) $-t+C=-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\sqrt{2};$ **г)** $\dfrac{1}{4}t^{-\frac{1}{3}}+C=-\dfrac{1}{4}\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}+\dfrac{1}{4\sqrt{5}}.$

1.55. $-1.$ **1.56.** 100. **1.57.** $1,-1,-1,-2.$

1.58. $\dfrac{1}{5}(F(x;2)-F(x;-3))+C.$ **1.59.** $\dfrac{1}{5}(2F(x;2)+3F(x;-3))+C.$

§ 2

2.1. 20. **2.2.** $\dfrac{21}{8}.$ **2.3.** $\dfrac{2}{3}(\sqrt{8}-1).$ **2.4.** $\dfrac{\pi}{6}.$

2.5. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}.$ **2.6.** $4-2\sqrt{2}.$ **2.7.** 2. **2.8.** 6.

2.9. 1. **2.10.** 9. **2.11.** $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 t^5\,dt=\dfrac{63}{12}.$

2.12. $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_9^{16}\dfrac{dt}{\sqrt{t}}=\int_3^4 dz=1.$ **2.13.** $\displaystyle\int_1^3\dfrac{dt}{1+t}=\ln 2.$

2.14. $\dfrac{1}{7}\displaystyle\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{\pi}{28}.$ **2.15.** $\dfrac{\pi}{8}.$

2.16. $\dfrac{1}{4}.$ **2.17.** $\dfrac{5}{56}.$ **2.18.** $\dfrac{5}{4}.$ **2.19.** $\dfrac{\pi}{12}.$

2.20. **а)** $\dfrac{32}{3};$ **б)** 9; **в)** $\dfrac{64}{3};$ **г)** $\dfrac{1}{3}.$

2.21. $600=6!-5!.$

2.22. **а)** $e^{\sin 1}-1\approx 1{,}3198;$ **б)** 0,75; **в)** $0{,}2402\approx\dfrac{1}{2}\ln^2 2.$

2.23. **а)** $\dfrac{1}{2}F(15)-\dfrac{1}{2}F(7);$ **б)** $\dfrac{1}{3}F(10)-\dfrac{1}{3}F(4);$

в) $\dfrac{1}{4}F(14)-\dfrac{1}{4}F(6);$ **г)** $\dfrac{1}{3}F(11)-\dfrac{1}{3}F(2).$

2.24. 3.

2.25. **а)** $\dfrac{1}{2}(F(\ln 5)-F(0));$ **б)** $\dfrac{1}{3}(F(8)-F(-8));$

в) $-\dfrac{1}{2}(F(1)-F(4));$ **г)** $\dfrac{1}{2}(F(2)-F(1)).$

2.26. **а)** $[180;360];$ **б)** $[60;280];$ **в)** $[180;280].$

2.27. $[4;12]$ $\left(1+x\leqslant f'(x)\leqslant 1+x+2x^3 \Rightarrow x+\dfrac{x^2}{2}\leqslant f(x)\leqslant x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2}\right).$

2.28. 2,5. **2.29.** 6. **2.30.** 14. **2.31.** $-1.$

2.32. **а)** $A=15$, $B=21$; **б)** $A=12$, $B=20$.
2.33. $x_{\max}=1$, $x_{\min}=2$. **2.34.** $6=2\cdot 3$. **2.35.** $12=4\cdot 3$. **2.36.** -2.
2.37. $5=\dfrac{6+9}{3}$. **2.38.** $3=\dfrac{-6}{-2}$. **2.39.** $\dfrac{1}{2}(F(6)-F(4))$. **2.40.** 13.
2.41. -2.

§ 3

3.1. 1. **3.2.** Расходится. **3.3.** Расходится.
3.4. $\dfrac{1}{p-1}$ при $p>1$. Расходится при $p\leqslant 1$.
3.5. $\dfrac{1}{2}$. **3.6.** $\dfrac{\pi}{4}$. **3.7.** $\dfrac{\pi^2}{8}$. **3.8.** Расходится. **3.9.** $\dfrac{1}{2}$. **3.10.** $\dfrac{1}{3}$.
3.11. $\dfrac{1}{120}$. **3.12.** 1. **3.13.** 2. **3.14.** $-\dfrac{\pi}{6}$. **3.15.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. **3.16.** π.
3.17. $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$. **3.18.** 2. **3.19.** Расходится.
3.20. Расходится. **3.21.** Расходится.
3.22. $\dfrac{1}{1-p}$ при $p<1$, расходится при $p\geqslant 1$. **3.23.** Расходится. **3.24.** $\dfrac{\pi}{2}$.
3.25. Расходится. **3.26.** $2{,}5(\sqrt[5]{3}+1)$. **3.27.** $\dfrac{1}{\ln 2}$. **3.28.** $\dfrac{\pi}{2}$. **3.29.** $-\dfrac{1}{4}$.
3.30. Сходится. **3.31.** Сходится. **3.32.** Сходится. **3.33.** Расходится.
3.34. Сходится. **3.35.** Сходится. **3.36.** Сходится. **3.37.** Сходится.
3.38. **а)** $a=-1$; **б)** $a=14$; **в)** $\sigma=4$; **г)** $\sigma=8$.

Глава 5

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Справочный материал и примеры решения задач

В зависимости от вида правой части простейшие дифференциальные уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, разрешенные относительно производной, в зависимости от вида правой части можно разделить на несколько категорий. Проведем классификацию таких уравнений:

а) уравнения с разделяющимися переменными $f(x, y) = g(x)h(y)$;

б) линейные уравнения $f(x, y) = a(x)y + b(x)$;

в) уравнение Бернулли $f(x, y) = a(x)y + b(x)y^n$, где $n \neq 1$;

г) однородные уравнения $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Задача 1. Решить уравнение $y' + 3x^2 y = 0$.

Сразу можно заметить, что одним из решений уравнения является функция $y = 0$ (так называемое тривиальное решение). Далее будем искать решения, отличные от тривиального. Согласно приведенной классификации данное уравнение может быть отнесено к уравнениям с разделяющимися переменными, где $f(x, y) = -3x^2 y$, $g(x) = -3x^2$, $h(y) = y$. Для решения уравнения с разделяющимися переменными необходимо выполнить преобразования, в результате которых одна часть уравнения будет содержать только x, а другая — только y:

$$y' = -3x^2 y, \quad \frac{dy}{dx} = -3x^2 y, \quad \frac{dy}{y} = -3x^2\, dx.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения

$$\int \frac{dy}{y} = -3\int x^2\, dx, \quad \ln|y| = -x^3 + C_0, \quad y = \pm e^{C_0} e^{-x^3}.$$

Учитывая, что множитель $\pm e^{C_0}$ является постоянной величиной, полученное решение можно записать в более простом виде $y = Ce^{-x^3}$ (постоянная C может быть как положительной, так и отрицательной). В случае если $C = 0$, получим найденное вначале тривиальное решение $y=0$. Таким образом, равенство $y=Ce^{-x^3}$ определяет все решения данного дифференциального уравнения.

Задача 2. Решить задачу Коши $y'+3x^2y=2xe^{-x^3}$, $y(0)=9$.

Приведенное уравнение относится к классу линейных уравнений, где

$$f(x,y)=-3x^2y+2xe^{-x^3},\quad a(x)=-3x^2,\quad b(x)=2xe^{-x^3}.$$

Решение линейного уравнения можно выполнить методом вариации произвольной постоянной. Для этого на первом шаге решим вспомогательное уравнение с разделяющимися переменными, положив $b(x)=0$, то есть уравнение $y'+3x^2y=0$. Его решение известно из предыдущего пункта 2: $y=Ce^{-x^3}$. На втором шаге считаем постоянную интегрирования C функцией от x и решение исходного уравнения будем искать в виде $y=C(x)e^{-x^3}$. Теперь решение задачи сводится к нахождению неизвестной функции $C=C(x)$. Подставив функцию $y=C(x)e^{-x^3}$ в исходное уравнение, получим

$$C'e^{-x^3}-3x^2Ce^{-x^3}+3x^2C(x)e^{-x^3}=2xe^{-x^3},\quad C'e^{-x^3}=2xe^{-x^3}.$$

В результате получаем уравнение для нахождения неизвестной функции $C(x)$: $C'=2x$, решение которого имеет вид $C=x^2+C_1$. Таким образом, общее решение исходного уравнения $y=(x^2+C_1)e^{-x^3}$.

Использование начального условия $y(0)=9$ позволяет найти значение неизвестной постоянной C_1. Подставив в найденное общее решение $x=0$ и $y=9$, получим, что $C_1=9$. Таким образом, решение задачи Коши имеет вид $y=(x^2+9)e^{-x^3}$.

Задача 3. Решить уравнение $xy'-2y+x^3y^2=0$.

Чтобы определить, к какому классу принадлежит данное уравнение, разделим его на x. Получим, что $y'=\dfrac{2y}{x}-x^2y^2$. Данное уравнение является уравнением Бернулли, где $f(x,y)=\dfrac{2y}{x}-x^2y^2$, $a(x)=\dfrac{2}{x}$, $b(x)=-x^2$ и $n=2$. Очевидно, что $y=0$ является решением данного уравнения. Далее будем считать, что $y\neq0$. Чтобы решить уравнение Бернулли, надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $z=\dfrac{1}{y^{n-1}}$:

$$\frac{y'}{y^2}=\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y}-x^2,\quad z=\frac{1}{y}.$$

Учитывая, что $z' = -\frac{y'}{y^2}$, получим линейное уравнение для функции $z = z(x)$: $z' = -\frac{2z}{x} + x^2$. Чтобы найти его решение, сначала решим соответствующее уравнение с разделяющимися переменными $z' = -\frac{2z}{x}$. После разделения переменных и интегрирования получим, что $z = \frac{C}{x^2}$. Считая далее, что $C = C(x)$, получим уравнение для функции $C(x)$ (см. задачу 2)

$$\frac{C'}{x^2} - \frac{2C}{x^3} = -\frac{2C}{x^3} + x^2, \quad \frac{C'}{x^2} = x^2, \quad C' = x^4.$$

Откуда следует, что

$$C(x) = \frac{x^5}{5} + C_1, \quad z = \frac{\frac{x^5}{5} + C_1}{x^2}$$

и окончательно

$$y = \frac{x^2}{\frac{x^5}{5} + C_1} \quad \text{и} \quad y = 0.$$

Задача 4. Решить уравнение $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$.

Поскольку в данном случае выполнено условие $f(tx, ty) = f(x, y)$, это уравнение относится к однородным уравнениям. Чтобы его решить, сделаем замену $y = t(x)x$. После подстановки в уравнение получим, что

$$t'x + t = \frac{t^2x^2 - x^2}{tx^2}, \quad t'x + t = \frac{t^2 - 1}{t}, \quad t'x = -\frac{1}{t}.$$

Решая последнее уравнение методом разделения переменных, получаем $\frac{t^2}{2} = -\ln|x| + C$. Подставляя $t = \frac{y}{x}$, получим решение в виде неявной функции $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2C - 2\ln|x|$.

Задача 5. Найти решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами $y'' - 7y' + 10y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$ и $y'(0) = -11$.

Чтобы решить уравнение, составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$. Его корнями являются $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 5$. Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Используя начальные условия для нахождения постоянных C_1 и C_2, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_2=-1, \\ 2C_1+5C_2=-11. \end{cases}$$

Решением системы являются $C_1=2$ и $C_2=-3$. Тогда решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям, является функция $y=2e^{2x}-3e^{5x}$.

Задача 6. Решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами $y''-6y'+34y=0$.

Чтобы решить данное уравнение, опять составим характеристическое уравнение $\lambda^2-6\lambda+34=0$. Его корнями являются $\lambda=3+5i$ и $\lambda=3-5i$. Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=(C_1\sin(x\operatorname{Im}\lambda)+C_2\cos(x\operatorname{Im}\lambda))e^{x\operatorname{Re}\lambda}=(C_1\sin 5x+C_2\cos 5x)e^{3x}.$$

Задача 7. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=4x+3y, \\ \dot{y}=x+6y. \end{cases}$$

Чтобы решить систему линейных уравнений, найдем собственные значения и собственные векторы матрицы коэффициентов $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+21=0.$$

Его корнями являются $\lambda=3$ и $\lambda=7$. Для каждого из найденных собственных значений решим однородную систему линейных уравнений $(A-\lambda E)\vec{x}=0$. Для собственного значения $\lambda=3$ собственные векторы имеют вид $\vec{u}_1=C_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. А для собственного значения $\lambda=7$ собственные векторы имеют вид $\vec{u}_2=C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда общее решение системы дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\vec{u}_1e^{3x}+\vec{u}_2e^{7x}=C_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3x}+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7x},$$

или

$$x=3C_1e^{3x}+C_2e^{7x} \quad \text{и} \quad y=-C_1e^{3x}+C_2e^{7x}.$$

§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1. Найдите общие решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

а) $xy' + y = 0$; **б)** $x^2y' + y = 0$;
в) $(x+1)y' + xy = 0$; **г)** $(2x+1)y' = 2y$;
д) $yy' + x = 0$; **е)** $xyy' = 1 - x^2$;
ж) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$; **з)** $xy\,dy = \sqrt{y^2+1}\,dx$;
и) $x^2y^2y' + 1 = y$.

1.2. Решите задачу Коши:

а) $y' = y$, $y(-2) = 4$; **б)** $xy' - 2y = 0$, $y(2) = 12$;
в) $y' = \dfrac{y}{x+1}$, $y(2) = 6$; **г)** $(1+x^2)y' + y = 0$, $y(1) = 1$.

1.3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному условию

а) $\dfrac{(y+1)'}{x} + e^y = 0$, $y = 0$ при $x = 1$;
б) $y' = -y^2$, $y = 0$ при $x = 2$;
б) $y' + y^2e^x = 0$, $y = 1$ при $x = 0$;
г) $2y'\sqrt{x} = y$, $y = 1$ при $x = 4$;
д) $x^2y' + y^2 = 0$, $y = 1$ при $x = -1$.

1.4. Решите однородные дифференциальные уравнения:

а) $xy' = x + 2y$; **б)** $(x+y)\,dy + (x-y)\,dx = 0$;
в) $x^2\,dy + (y^2 - 2xy)\,dx = 0$; **г)** $(xy - x^2)y' = y^2$;
д) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.

1.5. Решите линейные дифференциальные уравнения:

а) $y' - \dfrac{3y}{x} = x$; **б)** $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$;
в) $xy' + y = \ln x + 1$; **г)** $xy' - 2y = 2x^4$;
д) $x^2y' + xy + 1 = 0$; **е)** $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$;
ж) $x\ln x\,dy = (2y + \ln x)\,dx$.

1.6. Решите уравнения Бернулли:

а) $y'x + y = -xy^2$; **б)** $y' + 2y = y^2e^x$;
в) $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$; **г)** $x^2y' = y^2 + xy$;
д) $y' + xy = xy^3$.

1.7. Решите задачу Коши:

а) $x^2y' = 2xy - 3$, $y = 1$ при $x = -1$;

б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$, $y = 1$ при $x = -1$;

в) $3y^2y' + y^3 = x + 1$, $y = -1$ при $x = 1$.

Решите системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1.8—1.13).

1.8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$ (одно из собственных чисел равно 1).

1.15. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$ (одно из собственных чисел равно 1).

1.17. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$ (одно из собственных чисел равно 1).

Решите линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (1.18—1.26).

1.18. $y'' + y' - 2y = 0$.

1.19. $y'' + 4y' + 3y = 0$.

1.20. $y'' - 2y' = 0$.

1.21. $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

1.22. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

1.23. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

1.24. $y'' + 4y = 0$.

1.25. $y''' - 8y = 0$.

1.26. $y^{(4)} - y = 0$.

Найдите решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям (1.27—1.30).

1.27. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$.

1.28. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

1.29. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

1.30. $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1.31. Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

а) $3y^2y' = g'(x)$; **б)** $3y^2y' = 2xg'(x^2)$; **в)** $y' = \dfrac{g'(x)}{(\arccos y)'}$.

1.32. Решите задачу Коши:

а) $3y^2y' = g'(x)$, $y(7) = 2$, если $g(7) = 3$;

б) $3y^2y' = 2xg'(x^2)$, $y(2) = -2$, если $g(2) = -2$, $g(4) = 1$;

в) $y' = \dfrac{g'(x)}{(\arccos y)'}$, $y(3) = 0$, если $g(3) = -2$.

1.33. Найдите общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{g\left(\frac{y}{x}\right)}{g'\left(\frac{y}{x}\right)},$$

если

а) $g(z) = \arcsin z$; **б)** $g(z) = \operatorname{arctg} z$.

1.34. Проверьте, что общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения $y' + p(x)y = q(x)$ имеет вид $y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x)$, где $y_0(x)$ — частное решение исходного уравнения, а $\widetilde{y}(x)$ — общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$.

1.35. Используя результат предыдущей задачи, найдите общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения:

а) $y' + 3y = (4^{\sin x})' + 3 \cdot 4^{\sin x}$;

б) $y' - \dfrac{g'(x)}{g(x)}y = (\cos x^3)' - \dfrac{g'(x)}{g(x)} \cos x^3$.

1.36. При каких значениях k_1 и k_2 функция $C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ является общим решением уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$?

1.37. Найдите общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 3y' + 2y = (e^{x^2})'' - 3(e^{x^2})' + 2e^{x^2}$.

1.38. Найдите решение задачи Коши: $y'' - 4y = (x^2g(x))'' - 4x^2g(x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, если $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$.

Ответы к главе 5

§1

1.1. **а)** $y=\frac{C}{x}$; **б)** $y=Ce^{\frac{1}{x}}$; **в)** $y=C(x+1)e^{-x}$; **г)** $y=C(2x+1)$;
д) $x^2+y^2=C$; **е)** $x^2+y^2=\ln(Cx^2)$; **ж)** $y=2+C\cos x$;
з) $x=0$, $\ln|x|=C+\sqrt{y^2+1}$; **и)** $y=1$, $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C$.

1.2. **а)** $y=4e^{x+2}$; **б)** $y=3x^2$; **в)** $y=2(x+1)$; **г)** $y=e^{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} x}$.

1.3. **а)** $2(y+2)e^{-y}=x^2+3$; **б)** $y=0$; **в)** $y=e^{-x}$;
г) $y=e^{\sqrt{x}-2}$; **д)** $y=-x$.

1.4. **а)** $x+y=Cx^2$; **б)** $\ln(x^2+y^2)=C-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; **в)** $x(y-x)=Cy$, $y=0$;
г) $y=Ce^{y/x}$; **д)** $y^2-x^2=Cy$, $y=0$.

1.5. **а)** $y=Cx^3-x^2$; **б)** $y=\frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$; **в)** $y=\ln x+\frac{C}{x}$; **г)** $y=Cx^2+x^4$;
д) $xy=C-\ln|x|$; **е)** $y=e^x(\ln|x|+C)$; **ж)** $y=C\ln^2 x-\ln x$.

1.6. **а)** $y=\frac{1}{x\ln Cx}$; **б)** $y(e^x+Ce^{2x})=1$, $y=0$; **в)** $y^2=\frac{e^{x^2}}{2x+C}$;
г) $y=\frac{x}{C-\ln x}$; **д)** $y^2=\frac{1}{1+Ce^{x^2}}$.

1.7. **а)** $y=2x^2+\frac{1}{x}$; **б)** $y=\frac{2x}{1-3x^2}$; **в)** $y^3=x-2e^{1-x}$.

1.8. $x=C_1e^t+C_2e^{5t}$, $y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}$.

1.9. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$, $y=2C_1e^t-2C_2e^{3t}$.

1.10. $x=2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^t+C_2e^{5t}$.

1.11. $\begin{cases} x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t),\\ y=e^{2t}((C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t).\end{cases}$

1.12. $\begin{cases} x=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t),\\ y=e^t(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t).\end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x=(2C_2-C_1)\cos 2t-(2C_1+C_2)\sin 2t,\\ y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t.\end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t},\\ y=C_1e^t-3C_3e^{-t},\\ z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}.\end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x=C_1+3C_2e^{2t},\\ y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t},\\ z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}.\end{cases}$

1.16. $\begin{cases} x=C_2e^{2t}+C_3e^{3t},\\ y=C_1e^t+C_2e^{2t},\\ z=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}.\end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{5t},\\ y=C_1e^t-2C_2e^{2t}+C_3e^{5t},\\ z=-C_1e^t-3C_2e^{2t}+3C_3e^{5t}.\end{cases}$

1.18. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. **1.19.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$. **1.20.** $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.
1.21. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$. **1.22.** $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
1.23. $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. **1.24.** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.
1.25. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos x\sqrt{3} + C_3 \sin x\sqrt{3})$.
1.26. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.
1.27. $y = 4e^x + e^{4x}$. **1.28.** $y = e^{-x}$. **1.29.** $y = \sin 2x$. **1.30.** $y = 1$.
1.31. **а)** $y = \sqrt[3]{g(x) + C}$; **б)** $y = \sqrt[3]{g(x^2) + C}$; **в)** $y = \cos(g(x) + C)$.
1.32. **а)** $y = \sqrt[3]{g(x) + 5}$; **б)** $y = \sqrt[3]{g(x^2) - 9}$;
в) $y = \cos\left(g(x) + 2 + \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
1.33. **а)** $y = x \sin Cx$; **б)** $y = x \operatorname{tg} Cx$.
1.35. **а)** $y = 4^{\sin x} + Ce^{-3x}$; **б)** $y = \cos x^3 + Cg(x)$. **1.36.** $\{k_1, k_2\} = \{1, 2\}$.
1.37. $y = e^{x^2} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. **1.38.** $y = x^2 g(x) + 2{,}5e^{2x} + 0{,}5e^{-2x}$.

III. Функции нескольких переменных

Глава 6

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Справочный материал и примеры решения задач

1. *Вычисление частных производных.*

Частная производная функции нескольких переменных

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

по переменной x_k вычисляется по обычным правилам дифференцирования с той лишь особенностью, что все остальные переменные рассматриваются как постоянные.

В качестве примера вычислим частные производные функции

$$w = f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

При вычислении $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, считая y постоянной, получим

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

При вычислении $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, считая x постоянной, получим

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Задача 1. Найти приближенное значение $\sqrt{4{,}05^2+3{,}07^2}$.

Решение. Искомое число будем рассматривать как значение функции $w=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке (x, y), где $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$,

$x_0=4$, $y_0=3$ и $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Воспользуемся следующей формулой:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)=$$
$$=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Получим

$$df(x,y)=\frac{x\Delta x+y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$df(x_0,y_0)=\frac{4\Delta x+3\Delta y}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5}\cdot 0{,}05+\frac{3}{5}\cdot 0{,}07\approx 0{,}08,$$

тогда $\sqrt{4{,}05^2+3{,}07^2}\approx\sqrt{4^2+3^2}+0{,}08=5{,}08$.

§ 1. Область определения, линии уровня функции нескольких переменных

Изобразите область определения функции (1.1—1.10).

1.1. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$.

1.2. $z=\arcsin(x+y)$.

1.3. $z=\sqrt{xy}+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

1.4. $z=\ln(4-x^2-y^2)$.

1.5. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$.

1.6. $z=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

1.7. $z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}$.

1.8. $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

1.9. $u=\dfrac{x+y+z}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$.

1.10. $u=\sqrt{x+y+z}$.

Постройте линии уровня функции (1.11—1.20).

1.11. $z=\dfrac{y}{x}$.

1.12. $z=x^2-y^2$.

1.13. $z=x^2+y^2$.

1.14. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

1.15. $z=\sqrt{xy}$.

1.16. $z=\dfrac{y-x^2}{x^2}$.

1.17. $z=x^2y+y$.

1.18. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

1.19. $z=\min(x^2,y)$.

1.20. $z=\max(x+y,2x-3y)$.

§ 2. Частные производные. Производная сложной функции. Градиент. Производная по направлению

Найдите частные производные первого порядка (2.1—2.26).

2.1. $z = x^3 + 2y^3 - 7x^2y^4$.

2.2. $z = \dfrac{x^2 y}{x+y}$.

2.3. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x^2}$.

2.4. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

2.5. $z = x\sqrt[3]{y} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

2.6. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.7. $z = \sqrt{x}\, e^{y/x}$.

2.8. $z = xe^{-xy}$.

2.9. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

2.10. $z = xy\, e^{x+2y}$.

2.11. $z = e^{3x^2+2y^2-xy}$.

2.12. $z = x^2 e^{x^2-2xy+1}$.

2.13. $z = x^3 \log_2(x^2 - 2xy + 3)$.

2.14. $z = y^2 \cos(2y^2 - 4xy + 2)$.

2.15. $z = xye^{3x^2-6xy+3}$.

2.16. $z = y^2 \log_5(y^3 - 3xy + 7)$.

2.17. $z = 2x^2y\cos(2x^3 - 6xy + 4)$.

2.18. $u = yx^3 + xz^2 + y^2z$.

2.19. $u = \dfrac{x}{\sqrt{x+y^2+z^3}}$.

2.20. $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

2.21. $u = x^{y/z}$.

2.22. $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$.

2.23. $u = \sin(x+2y) + 2\sqrt{xyz}$.

2.24. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$.

2.25. $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z^3)$.

2.26. $u = x^3y^2z + 3x - 5y + z + 2$.

2.27. Проверьте, что функция z удовлетворяет данному уравнению:

а) $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$, $z = y\ln(x^2 - y^2)$;

б) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2}$, $z = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$;

в) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$, $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$;

г) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, $z = \dfrac{y^2}{3x} + xy$;

д) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, $z = xy + xe^{y/x}$.

2.28. Проверьте, что функция $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ удовлетворяет уравнению $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$.

2.29. Найдите u'_x и u'_y, если $u = f(t)$ и $t = \dfrac{y}{x}$.

2.30. Найдите u'_x и u'_y, если $u=f(t)$ и $t=\sqrt{x^2+y^2}$.

2.31. Найдите u'_x, u'_y и u'_z, если $u=f(t)$ и $t=xy^2z^3$.

2.32. Найдите u'_x, u'_y и u'_z, если $u=f(t)$ и $t=xy+\dfrac{z^2}{x}$.

2.33. Найдите $\dfrac{dz}{dt}$, если

а) $z=x^2y^3$, $x=t^3+2$ и $y=3t^4-1$;

б) $z=x\sin\dfrac{x}{y}$, $x=1+3t$ и $y=\sqrt{1+t^2}$;

в) $z=e^{3x+2y}$, $x=\cos t$ и $y=t^2$;

г) $z=\dfrac{y^2-1}{x}$, $x=1-e^{2t}$ и $y=e^t$;

д) $z=e^{xy}\ln(x+y)$, $x=2t^2$ и $y=1-2t^2$;

е) $z=\ln(x+\ln y)$, $x=e^{2t^2}$ и $y=\ln t$.

2.34. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если

а) $z=e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}}$ и $x=\sin t$, $y=\operatorname{tg} t$;

б) $z=\ln(x+\sqrt{t^2+y^2})$ и $x=t^2+1$, $y=e^t$;

в) $z=x^2e^{\frac{y}{t}}$ и $x=\ln(t^2+1)$, $y=t^3$;

г) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{xt}{y}$ и $x=\operatorname{tg} t$, $y=e^{t^2+1}$;

д) $z=e^{xy}$ и $y=\varphi(x)$;

е) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ и $y=x^2$;

ж) $z=\ln(x^3y^2)$ и $y=e^{x^2+3}$.

2.35. Найдите производные z'_u и z'_v функции $z=z(x,y)$, где $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$:

а) $z=\ln(x^2+y^2)$, $x=u^2v$, $y=\dfrac{u}{v^3}$;

б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $x=u\sin v$, $y=u\cos v$;

в) $z=x^3+y^3$, $x=\ln\sqrt{u^2+v^2}$, $y=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$;

г) $z=\sqrt{xy}$, $x=\ln u$, $y=\ln v$;

д) $z=\ln\dfrac{x}{y}$, $x=\sin\dfrac{u}{v}$, $y=\sqrt{\dfrac{u}{v}}$.

2.36. Дана функция $y(x)=(1+x^2)^{e^{-x}-e+1}$. Записав $y=u^v$, где $u=1+x^2$, $v=e^{-x}-e+1$, найдите $y'(x)$ как производную сложной функции. В ответе укажите $y'(-1)$.

2.37. Найдите в указанной точке производную функции $y=y(x)$, заданной неявно:

а) $x^5+2xy^2-y^3-1=0$, $(1;2)$;
б) $e^{x^4-y^2}-y^2+15=0$, $(2;4)$;
в) $(1+2x)e^{y/x}-x=0$, $(-1;0)$.

Найдите в указанной точке первые частные производные функции $z=z(x,y)$, заданной неявно (2.38—2.42).

2.38. $z^3+3xyz+1=0$, $(0;1)$.

2.39. $e^z-xyz-2=0$, $(1;0)$.

2.40. $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$, $\left(1;1;\frac{1}{3}\right)$.

2.41. $x^3+2y^3+z^3-3xyz+2y-3=0$, $(1;1;-2)$.

2.42. $z-x=y\operatorname{ctg}(z-x)$, $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

2.43. Найдите производную функции z по направлению $\vec{l}$ в точке M:
а) $z=x^3y-5xy^2+8$, $\vec{l}=(1;1)$, $M(1;1)$;
б) $z=\ln\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, $\vec{l}=(6;8)$, $M(1;2)$;
в) $z=x^2+xy+2x+2y$, $\vec{l}=(3;4)$, $M(1;1)$.

2.44. Найдите производную функции u в точке A по направлению $\overrightarrow{AB}$, где
а) $u=xy-\frac{x}{z}$, $A(-4;3;-1)$, $B(1;4;-2)$;
б) $u=x+\ln(y^2+z^2)$, $A(2;1;1)$, $B(0;2;0)$;
в) $u=x^2y-\ln(xy+z^2)$, $A(1;5;-2)$, $B(1;7;-4)$.

2.45. Найдите производную функции $z=3x^4+y^3+xy$ в точке $M(1;2)$ по направлению луча, образующего с осью Ox угол $135°$.

2.46. Найдите производную функции $u=x^2-3yz+4$ по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями, в точке $M(1;2;-1)$.

2.47. Найдите производную функции z по направлению $\vec{l}$ в точке M, если
а) $z=f(x^2+xy+2x+2y-1)$, $f'(5)=-2\sqrt{13}$, $\vec{l}=(3;2)$, $M(1;1)$;
б) $z=f(y^2-xy+3x-2y-2)$, $f'(1)=2\sqrt{5}$, $\vec{l}=(2;-4)$, $M(2;3)$.

2.48. Найдите единичный вектор $\vec{l}$, по направлению которого производная заданной функции в точке M достигает наибольшего значения:
а) $z=x^2-xy+y^2$, $M(-1;2)$;

б) $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$, $M(3; 1)$;
в) $u = xz^y$, $M(-3; 2; 1)$.

2.49. Дана функция z, точка A и вектор $\vec{l}$. При каком значении параметра a производная функции в точке A по направлению $\vec{l}$ будет максимальна?
а) $z = 3x^2y + x + y^3$, $A(1; 2)$, $\vec{l} = a\vec{i} + 30\vec{j}$;
б) $z = 2xy^3 - x^2 + 2y$, $A(-1; -2)$, $\vec{l} = a\vec{i} + 11\vec{j}$.

2.50. Найдите приближенно производную функции $f(P)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если $f(A) = 5$, $f(B) = 5{,}06$ и длина AB равна 0,03.

2.51. Найдите приближенно значение $f(B)$, если $f(A) = 6$, длина отрезка AB равна 0,02, $\operatorname{grad} f(A) = (6; -8)$, а косинус угла между вектором $\operatorname{grad} f(A)$ и вектором $\overrightarrow{AB}$ равен $\frac{2}{5}$.

2.52. Найдите приближенно значение $f(B)$, если $f(A) = -8$, длина отрезка AB равна 0,06, $\operatorname{grad} f(A) = (12; 5)$, а косинус угла между вектором $\operatorname{grad} f(A)$ и вектором $\overrightarrow{AB}$ равен $-\frac{1}{3}$.

§ 3. Первый и второй дифференциал. Касательная плоскость

3.1. Найдите приращение Δf и дифференциал df функции в точке $(1; 1)$, если $f(x, y) = x^2y$.

3.2. Найдите приращение Δf и дифференциал df функции в точке $(1; 1)$, если $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$.

3.3. Найдите первый дифференциал функции f в данной точке:
а) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(1; 1)$;
б) $f(x, y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$, $(2; 1)$;
в) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, $(1; 0; 1)$;
г) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{z^2}$, $(3; 2; 1)$;
д) $f(x, y, z) = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$, $(1; 1; 1)$.

3.4. Найдите первый дифференциал функции f:
а) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$; **б)** $f(x, y) = \ln(3x + 2y)$;
в) $f(x, y) = (y^3 + 2x^2y + 3)^4$; **г)** $f(x, y) = x + y^2 + \ln(x + y^2)$;

д) $f(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2+y^2}$; **е)** $f(x, y, z) = \operatorname{tg}^2 \dfrac{xy}{z}$;

ж) $f(x, y, z) = e^{x^2yz^3}$.

3.5. Найдите все частные производные второго порядка:

а) $f(x, y) = xy(x^3+y^3-3)$; **б)** $f(x, y) = y^2(1-e^x)$;

в) $f(x, y) = \ln(x^2+y)$; **г)** $f(x, y, z) = x(1+y^2z^3)$;

д) $f(x, y, z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$; **е)** $f(x, y, z) = \sin \dfrac{xy}{z}$.

3.6. Покажите, что если $u = xz + e^{yz} + y$, то $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

3.7. Покажите, что если $u = xz + e^{yz} + y$, то $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial z\, \partial y\, \partial x}$.

3.8. Найдите все частные производные третьего порядка:

а) $z = x^4+5y^3+3x-y$; **б)** $z = xe^y + ye^x$;

в) $z = \sin(3x-2y)$; **г)** $z = x^2y^3$.

3.9. Найдите вторые дифференциалы:

а) $z = e^{3x-2y}$; **б)** $z = y \ln x$;

в) $z = x \ln \dfrac{x}{y}$; **г)** $z = e^{x+y^2}$;

д) $u = xy + yz + xz$;

е) $u = x^4 + 2y^3 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$.

3.10. Найдите точки, в которых градиент функции равен 0, если

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$;

б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

в) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$.

3.11. Найдите точки, в которых первый дифференциал функции f равен нулю:

а) $f(x, y, z) = 2y^2 + z^2 - xy^2 - yz + 4x + 1$;

б) $f(x, y) = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$;

в) $f(x, y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

3.12. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A)=2$, $f(B)=2{,}03$, $f(C)=1{,}92$, где $A(2; 6)$, $B(2; 6{,}01)$, $C(2{,}02; 6)$. Найдите приближенно частные производные в точке A и значение производной по направлению вектора $\vec{l}=(3; 4)$.

3.13. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A)=5$, $f(B)=5{,}03$, $f(C)=5{,}08$, где $A(3; 7)$, $B(3; 7{,}01)$, $C(3{,}02; 7)$. Найдите приближенно частные производные в точке A и значение производной по направлению вектора $\vec{l}=(3; 4)$.

3.14. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P)=$ $=f(x,y)$. Известно, что $f(A)=3$, $f(B)=2{,}97$, $f(C)=3{,}08$, при этом $A(3;\,6)$, $B(3;\,6{,}01)$, $C(3{,}02;\,6)$. Найдите приближенно частные производные в точке A и значение производной по направлению вектора $\vec{l}=(3;\,4)$.

3.15. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M:

а) $z=\dfrac{x^2}{2}-y^2$, $M(2;\,-1;\,1)$;
б) $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$, $M(1;\,1;\,1)$;
в) $z=\ln(x^2+y^2)$, $M(1;\,0;\,0)$;
г) $x(y+z)(z-xy)=8$, $M(2;\,1;\,3)$;
д) $x^2-y^2-z^2=1$, $M(3;\,2;\,2)$;
е) $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$, $M(1;\,1;\,2)$;
ж) $e^z-z+xy=3$, $M(2;\,1;\,0)$.

3.16. Напишите уравнение плоскости, параллельной плоскости α и касательной к заданной поверхности:
а) $3x^2+2y^2+z^2=21,\quad \alpha\colon 6x-4y-z=0$;
б) $xy+z^2+xz=1,\quad \alpha\colon x+2z-y=0$.

3.17. Напишите уравнение плоскости, которая касается сферы

$$x^2+y^2+z^2=2x$$

и перпендикулярна плоскостям $x-y-z=2$ и $x-y-\frac{1}{2}z=2$.

3.18. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P)=$ $=f(x,y)$, у которой известны значения $f(A)=-7$, $f(B)=-7{,}02$, $f(C)=-7{,}04$ в точках $A(6;\,4)$, $B(6{,}01;\,4)$, $C(6;\,3{,}98)$. Найдите приближенно:

а) частные производные и первый дифференциал в точке A;
б) значение функции в точке $D(5{,}95;\,4{,}02)$;
в) касательную плоскость к поверхности $z=f(P)$ в точке A;
г) нормаль к поверхности $z=f(P)$ в точке A;
д) градиент в точке A;
е) производную в точке A по направлению, составляющему угол $\frac{\pi}{6}$ с градиентом;
ж) производную в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AD}$;
з) линию уровня, проходящую через точку A, в окрестности этой точки (при дополнительном предположении, что в этой окрестности функция $f(P)$ имеет непрерывные частные производные).

3.19. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема. Докажите, что $f(1+2t; 2+3t) - f(1; 2) = k \cdot t + o(t)$ при $t \to 0$, и найдите k.

3.20. Пусть функция $f(x; y; z)$ дифференцируема. Докажите, что $f(4+2t; 5t; -2+t) - f(4; 0; -2) = k \cdot t + o(t)$ при $t \to 0$, и найдите k.

3.21. Используя определение дифференциала, найдите частные производные $f'_x(0; 2)$ и $f'_y(0; 2)$, если $f(2t; 2-3t) - f(0; 2) = -8t + o(t)$ и $f(3t; 2+2t) - f(0; 2) = t + o(t)$.

3.22. Пусть функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка в точке $A(0; 1)$, и $f'_x(A) = f'_y(A) = 0$. Докажите, что $f(2t; 1+3t) - f(0; 1) = k \cdot t^2 + o(t^2)$ при $t \to 0$, и найдите k.

3.23. Функция $f(x, y)$ имеет отрицательные непрерывные частные производные 2-го порядка в точке $A(0; 1)$, и $f'_x(A) = f'_y(A) = 0$. Докажите, что функция $g(t) = f(2t; 1+3t) - f(0; 1)$ имеет локальный максимум при $t = 0$.

3.24. Известно, что $f(1+2t; 2+3t) - f(1; 2) = 13t + o(t)$ при $t \to 0$. Найдите производную функции $f(x, y)$ в точке $A(1; 2)$ по направлению вектора $\vec{l} = (2; 3)$.

3.25. Известно, что $f(5; 6) - f(5+3t; 6-4t) \sim 10t$ при $t \to 0$. Найдите производную функции $f(x, y)$ в точке $A(5; 6)$ по направлению вектора $\vec{l} = (3; -4)$.

3.26. Известно, что $f(5-3t; 6+4t) - f(5; 6) = 15t + o(t)$ при $t \to 0$. Найдите производную функции $f(x, y)$ в точке $A(5; 6)$ по направлению вектора $\vec{l} = (3; -4)$.

§ 4. Приближенные вычисления. Формула Тейлора

4.1. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенное значение $\exp(2{,}05^3 + 0{,}9^4 - 9)$, исходя из значения функции $z = \exp(x^3 + y^4 - 9)$ при $x = 2$, $y = 1$.

4.2. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенное значение $\sqrt{3{,}61 - 0{,}05^2}$, исходя из значения функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ при $x = 2$, $y = 0$.

4.3. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно

а) $1{,}02^3 \cdot 0{,}97^2$; **б)** $\sqrt{4{,}05^2 + 2{,}93^2}$; **в)** $\dfrac{1{,}98^3}{2{,}01^2}$;

г) $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$; **д)** $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$; **е)** $0{,}97^{1{,}05}$.

4.4. На сколько изменится диагональ и площадь прямоугольника со сторонами $x=6$ м и $y=8$ м, если первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм?

4.5. При заданной производственной функции Кобба — Дугласа $Q=AK^{0,9}L^{0,5}$ ($A=\mathrm{const}$) установите, как изменится объем выпуска продукции Q (в процентах) при увеличении затрат капитала K и уменьшении трудовых ресурсов L соответственно на 5 % и 7 %.

4.6. На сколько процентов приближенно изменится спрос, описываемый функцией $z=5474e^{-\sqrt{n+p^2}}$, где n — число производителей товара, а p — цена товара, если число производителей товара уменьшится на 1 %, а цена возрастет на 1 %? На рынке товара имеется 7 производителей, цена товара составляет 3 ед.

4.7. Разложите функцию $f(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M.

а) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$, $M(1;-2)$;

б) $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$, $M(-2;1)$;

в) $f(x,y,z)=x^2+3z^2-2yz-3z$, $M(0;1;2)$.

4.8. Разложите функцию $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;1;1)$ с точностью до членов второго порядка малости.

4.9. Разложите функцию f по формуле Тейлора в окрестности точки M до $o(\rho^2)$.

а) $f(x,y)=\sin x\ln y$, $M(0;2)$, $\rho=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$;

б) $f(x,y,z)=\ln(xy+z^2)$, $M(0;0;1)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$.

4.10. Разложите функцию f по формуле Тейлора в окрестности точки M с точностью до членов второго порядка малости.

а) $f(x,y)=x^y$, $M(1;1)$;

б) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1+y}$, $M(0;0)$;

в) $f(x,y)=\ln\left(\pi-4\operatorname{arctg}x+\dfrac{x^2}{y}\right)$, $M(1;1)$.

Ответы к главе 6

§ 2

2.1. $z'_x = 3x^2 - 14xy^4$, $z'_y = 6y^2 - 28x^2y^3$.

2.2. $z'_x = \dfrac{x^2y + 2xy}{(x+y)^2}$, $z'_y = \dfrac{x^3}{(x+y)^2}$. **2.3.** $z'_x = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{2y}{x^3}$, $z'_y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{x^2}{y^2}$.

2.4. $z'_x = y(2xy + y^2)^{-1/2}$, $z'_y = (x+y)(2xy + y^2)^{-1/2}$.

2.5. $z'_x = \sqrt[3]{y} - 0{,}5yx^{-3/2}$, $z'_y = \dfrac{1}{3}xy^{-4/3} + x^{-1/2}$.

2.6. $z'_x = y^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$, $z'_y = -xy(x^2 + y^2)^{-3/2}$.

2.7. $z'_x = 0{,}5e^{x/y}\dfrac{x^{3/2} - 2y\sqrt{x}}{x^2}$, $z'_y = x^{-1/2}e^{y/x}$.

2.8. $z'_x = e^{-xy}(1 - xy)$, $z'_y = -x^2e^{-xy}$. **2.9.** $z'_x = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

2.10. $z'_x = e^{x+2y}(y + xy)$, $z'_y = e^{x+2y}(x + 2xy)$.

2.11. $z'_x = (6x - y)e^{3x^2+2y^2-xy}$, $z'_y = (4y - x)e^{3x^2+2y^2-xy}$.

2.12. $z'_x = (2x^3 - 2x^2y + 2x)e^{x^2-2xy+1}$, $z'_y = -2x^3e^{x^2-2xy+1}$.

2.13. $z'_x = 3x^2\log_2(x^2 - 2xy + 3) + \dfrac{2x^4 - 2x^3y}{x^2 - 2xy + 3}\dfrac{1}{\ln 2}$, $z'_y = -\dfrac{2x^4}{x^2 - 2xy + 3}\dfrac{1}{\ln 2}$.

2.14. $z'_x = 4y^3\sin(2y^2 - 4xy + 2)$,
$z'_y = 2y\cos(2y^2 - 4xy + 2) - (2y^3 - 4xy^2)\sin(2y^2 - 4xy + 2)$.

2.15. $z'_x = (6x^2y - 6xy^2 + y)e^{3x^2-6xy+3}$, $z'_y = (x - 6x^2y)e^{3x^2-6xy+3}$.

2.16. $z'_x = -\dfrac{3y^3}{y^3 - 3xy + 7}\dfrac{1}{\ln 5}$, $z'_y = 2y\log_5(y^3 - 3xy + 7) + \dfrac{3y^4 - 3xy^2}{y^3 - 3xy + 7}\dfrac{1}{\ln 5}$.

2.17. $z'_x = 4xy\cdot\cos(2x^3 - 6xy + 4) - 2x^2y(6x^2 - 6y)\sin(2x^3 - 6xy + 4)$,
$z'_y = 2x^2\cos(2x^3 - 6xy + 4) + 12x^3y\sin(2x^3 - 6xy + 4)$.

2.18. $u'_x = 3x^2y + z^2$, $u'_y = x^3 + 2yz$, $u'_z = 2xz + y^2$.

2.19. $u'_x = (0{,}5x + y^2 + z^3)(x + y^2 + z^3)^{-3/2}$, $u'_y = -xy(x + y^2 + z^3)^{-3/2}$,
$u'_z = -\dfrac{3}{2}xz^2(x + y^2 + z^3)^{-3/2}$.

2.20. $u'_x = zx^{z-1}y^{-z}$, $u'_y = -zx^zy^{-z-1}$, $u'_z = (x/y)^z\ln(x/y)$.

2.21. $u'_x = (y/z)x^{y/z-1}$, $u'_y = z^{-1}x^{y/z}\ln x$, $u'_z = -yz^{-2}x^{y/z}\ln x$.

2.22. $u'_x = 2xy - \dfrac{1}{2}y(xy + z^2)^{-1/2}$, $u'_y = x^2 - \dfrac{1}{2}x(xy + z^2)^{-1/2}$,
$u'_z = -z(xy + z^2)^{-1/2}$.

2.23. $u'_x = \cos(x + 2y) + \sqrt{yz/x}$, $u'_y = 2\cos(x + 2y) + \sqrt{xz/y}$, $u'_z = \sqrt{xy/z}$.

2.24. $u'_x = 2x/(x^2 - 3) + y^2x$, $u'_y = 2xyz$, $u'_z = xy^2$.

2.25. $u'_x = 2x$, $u'_y = -1/(1+(y+z^3)^2)$, $u'_z = -3z^2/(1+(y+z^3)^2)$.

2.26. $u'_x = 3x^2y^2z + 3$, $u'_y = 2x^3yz - 5$, $u'_z = x^3y^2 + 1$.

2.29. $u'_x = -x^{-2}y \cdot f'(t)$, $u'_y = x^{-1} \cdot f'(t)$.

2.30. $u'_x = x(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot f'(t)$, $u'_y = y(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot f'(t)$.

2.31. $u'_x = y^2z^3 \cdot f'(t)$, $u'_y = 2xyz^3 \cdot f'(t)$, $u'_z = 3xy^2z^2 \cdot f'(t)$.

2.32. $u'_x = \left(y - \frac{z^2}{x^2}\right) \cdot f'(t)$, $u'_y = x \cdot f'(t)$, $u'_z = \frac{2z}{x} \cdot f'(t)$.

2.33. **а)** $\frac{dz}{dt} = 6xy^3t^2 + 36x^2y^2t^3$;

б) $\frac{dz}{dt} = 3\left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right) - \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$;

в) $\frac{dz}{dt} = e^{3x+2y}(-3\sin t + 4t)$; **г)** $\frac{dz}{dt} = \frac{2(y^2-1)}{x^2}e^{2t} + \frac{2y}{x}e^t$;

д) $\frac{dz}{dt} = 0$; **е)** $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x+\ln y}\left(4te^{2t^2} + \frac{1}{yt}\right)$.

2.34. **а)** $\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)t^{-3/2}e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}}$,

$\frac{dz}{dt} = e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}}\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)t^{-3/2} + 2xt^{-1/2}\cos t + 2yt^{-1/2}\cos^{-2} t\right)$;

б) $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{t}{x+\sqrt{t^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2+y^2}}$,

$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x+(t^2+y^2)^{1/2}}(t(t^2+y^2)^{-1/2} + 2t + y(t^2+y^2)^{-1/2}e^t)$;

в) $\frac{\partial z}{\partial t} = -x^2yt^{-2}e^{y/t}$, $\frac{dz}{dt} = e^{y/t}\left(-x^2yt^{-2} + \frac{4xt}{t^2+1} + 3x^2t\right)$;

г) $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{xy}{y^2+x^2t^2}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y^2+x^2t^2}(xy + ty\cdot\cos^{-2} t - 2t^2xe^{t^2+1})$;

д) $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{dz}{dx} = e^{xy}(y + x\cdot\varphi'(x))$;

е) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2+y^2}(2x^2-y)$; **ж)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{x}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{3}{x} + \frac{4x}{y}e^{x^2+3}$.

2.35. **а)** $z'_u = 4x\frac{1}{x^2+y^2}u + \frac{2y}{x^2+y^2}v^{-3}$, $z'_v = \frac{2x}{x^2+y^2}u^2 - \frac{6y}{x^2+y^2}uv^{-4}$;

б) $z'_u = \frac{1}{x^2+y^2}(y\cdot\sin v - x\cdot\cos v)$, $z'_v = \frac{1}{x^2+y^2}(y\cdot\cos v + x\cdot\sin v)u$;

в) $z'_u = \frac{3(xu+3yv)}{u^2+v^2}$, $z'_v = \frac{3(xv-yu)}{u^2+v^2}$;

г) $z'_u = 0{,}5\sqrt{y/x}\cdot u^{-1}$, $z'_v = 0{,}5\sqrt{x/y}\cdot v^{-1}$;

д) $z'_u = x^{-1}v^{-1}\cos(u/v) - 0{,}5y^{-1}(uv)^{-1/2}$,

$z'_v = -x^{-1}uv^{-2}\cos(u/v) + 0{,}5y^{-1}(u/v^3)^{1/2}$.

2.36. $-2(1+e\ln 2)$. **2.37.** **а)** $\frac{13}{4}$; **б)** 2; **в)** -1. **2.38.** $z'_x = 1$, $z'_y = 0$.

2.39. $z'_x = 0$, $z'_y = \frac{\ln 2}{2}$. **2.40.** $z'_x = -2$, $z'_y = \frac{10}{3}$. **2.41.** $z'_x = -1$, $z'_y = -\frac{14}{9}$.

2.42. $z'_x = 1$, $z'_y = \frac{2}{2+\pi}$.

2.43. **а)** $-\frac{11}{\sqrt{2}}$; **б)** $-\frac{3}{25}$; **в)** $\frac{27}{5}$.
2.44. **а)** $\frac{20\sqrt{3}}{9}$; **б)** $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; **в)** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.
2.45. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.46.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2.47. **а)** $-42=-2\sqrt{13}\cdot\frac{21}{\sqrt{13}}$; **б)** $-8=2\sqrt{5}\cdot\frac{-4}{\sqrt{5}}$.
2.48. **а)** $\frac{-4\vec{i}+5\vec{j}}{\sqrt{41}}$; **б)** $\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$; **в)** $\frac{\vec{i}-6\vec{k}}{\sqrt{37}}$.
2.49. **а)** 26; **б)** 7.
2.50. $f(P)\approx 2$. **2.51.** $f(B)\approx 6{,}08$. **2.52.** $f(B)\approx -8{,}26$.

§ 3

3.1. $\Delta f=2\,dx+dy+(dx)^2+2\,dx\,dy+(dx)^2\,dy$, $df=2\,dx+dy$.
3.2. $\Delta f=3\,dx-dy+(dx)^2+dx\,dy-(dy)^2$, $df=3dx-dy$.
3.3. **а)** $dx-dy$; **б)** $\frac{1}{2}\,dx$; **в)** $-\frac{dz}{2}$; **г)** $\frac{2\,dx+3\,dy-12dz}{37}$; **д)** $2\,dx+\ln 4\,dz$.
3.10. **а)** $(2;0)$; **б)** $(0;0)$, $(1;1)$; **в)** $(7;2;1)$.
3.11. **а)** $\left(\frac{7}{4};2;1\right)$, $\left(\frac{7}{4};-2;-1\right)$; **б)** $(1;-2)$; **в)** $(1;3)$, $\left(-\frac{1}{26};-\frac{3}{26}\right)$.
3.12. 0. **3.13.** $\frac{24}{5}$. **3.14.** 0.
3.15. **а)** $2x+2y-z-1=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$;
б) $x-2y+z=0$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$;
в) $2x-z-2=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}$;
г) $2x+7y-5z+4=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-5}$;
д) $3x-2y-2z=1$, $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{2}$;
е) $2x+y+11z=25$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{11}$;
ж) $x+2y=4$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$.
3.16. **а)** $6x-4y-z=\pm 21$; **б)** $x-y+2z=\pm\sqrt{5}$.
3.17. $x+y=1\pm\sqrt{2}$.
3.18. **а)** $f'_x(A)\approx -2$, $f'_y(A)\approx 2$, $df(A)\approx -2\,dx+2\,dy$; **б)** $f(D)\approx -6{,}86$;
в) $z=-2x+2y-3$; **г)** $\frac{x-6}{-2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+4}{-1}$; **д)** $\operatorname{grad} f(A)\approx(-2;2)$;
е) $\sqrt{6}$; **ж)** $\frac{14}{\sqrt{29}}$; **з)** $-2x+2y+4=0$.
3.19. $2f'_x(1;2)+3f'_y(1;2)$.
3.20. $2f'_x(4;0;-2)+5f'_y(4;0;-2)+f'_z(4;0;-2)$.
3.21. $f'_x(0;2)=-1$, $f'_y(0;2)=2$.
3.22. $\frac{1}{2}(4f''_{xx}(0;1)+12f''_{xy}(0;1)+9f''_{yy}(0;1))$. **3.24.** $\sqrt{13}$. **3.25.** -2.
3.26. -3.

§4

4.1. 1,2. **4.2.** 1,9.

4.3. **а)** 1,00; **б)** 4,998. **в)** 1,92; **г)** 1,055; **д)** 2,95; **е)** 0,97.

4.4. Диагональ уменьшится на 3 мм, площадь уменьшится на 140 см^2.

4.5. Вырастет на 1%. **4.6.** 1,375%.

4.7. **а)** $f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$;

б) $f(x,y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$;

в) $f(x,y)=2-4(y-1)+7(z-2)+x^2+3(z-2)^2-2(y-1)(z-2)$.

4.8. $f(x,y,z)=3(x-1)^2+3(y-1)^2+3(z-1)^2-3(x-1)(y-1)-$
$-3(x-1)(z-1)-3(y-1)(z-1)+o(\rho^2)$,
$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$.

4.9. **а)** $f(x,y)=x\ln 2+0{,}5x(y-2)+o(\rho^2)$;

б) $f(x,y)=2(z-1)-(z-1)^2+xy+o(\rho^2)$.

4.10. **а)** $f(x,y)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+o(\rho^2)$;

б) $f(x,y)=\dfrac{\pi}{4}+0{,}5(x-y)-0{,}25(x^2-y^2)+o(\rho^2)$;

в) $f(x,y)=-(y-1)+2(x-1)^2+0{,}5(y-1)^2-2(x-1)(y-1)+o(\rho^2)$.

Глава 7

Экстремум функций нескольких переменных

Справочный материал и примеры решения задач

Задача 1. Найти локальные экстремумы функции нескольких переменных $w=2x^2+y^3-12xy+4x-12y+2$.

Решение. Необходимое условие локального экстремума — это равенство нулю частных производных первого порядка. Вычислим частные производные данной функции и приравняем их к нулю:

$$w'_x = 4x-12y+4=0,$$
$$w'_y = 3y^2-12x-12=0.$$

Решая систему, находим стационарные точки:

$$M_1=(-1;0),\quad M_2=(35;12).$$

Проверим найденные точки на выполнение достаточных условий локального экстремума. Найдем частные производные второго порядка.

$$A=w''_{xx}=4,\quad B=w''_{xy}=w''_{yx}=-12,\quad C=w''_{yy}=6y.$$

Способ 1.

Составим матрицу Гессе $H=\begin{pmatrix} w''_{xx} & w''_{xy} \\ w''_{yx} & w''_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 6y \end{pmatrix}$ и вычислим ее угловые миноры $\Delta_1=4$, $\Delta_2=24y-144$. Достаточное условие того, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $w(x,y)$ имеет в стационарной точке (x,y) строгий локальный минимум, состоит в том, что все угловые миноры матрицы Гессе положительны $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$. Достаточное условие того, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $w(x,y)$ имеет в стационарной точке (x,y) строгий локальный максимум, состоит в том, что знаки угловых миноров чередуются следующим образом $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$. В точке M_1 $\Delta_1=4>0$ и $\Delta_2=-144<0$. Следовательно, в этой точке второй дифференциал функции не является знакопостоянной квадратичной формой, и точка M_1 не является точкой экстремума. В точке M_2 $\Delta_1=4>0$ и $\Delta_2=144>0$. Следовательно, в этой точке второй дифференциал является положительно определенной квадратичной формой, точка M_2 является точкой минимума и $w_{\min}=w(M_2)=-864$.

Способ 2.

У дважды непрерывно дифференцируемая функция $w=w(x,y)$ есть локальный максимум в стационарной точке, если $D=AC-B^2>0$ и $A<0$. И функция $w=w(x,y)$ имеет локальный минимум, если $D=AC-B^2>0$ и $A>0$.

Составим выражение $D=AC-B^2=24y-144$ и вычислим его в точках M_1, M_2: $D(M_1)=-144, D(M_2)=144$. Следовательно, экстремума в точке M_1 нет, а в точке M_2 функция имеет экстремум. Поскольку $w''_{xx}(M_2)=4>0$, этот экстремум является минимумом.

Задача 2. Найти локальные экстремумы функции нескольких переменных

$$w=-x^2-y^2-z^2+2x+4y-6z.$$

Найдем стационарные точки функции:

$$\begin{cases} w'_x=-2x+2=0,\\ w'_y=-2y+4=0,\\ w'_z=-2z-6=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим единственную стационарную точку $M(1;2;-3)$. Второй способ из предыдущей задачи для исследования достаточного условия экстремума здесь неприменим, так как количество переменных больше 2. Поэтому воспользуемся способом 1 и составим матрицу Гессе

$$H=\begin{pmatrix} w''_{xx} & w''_{xy} & w''_{xz}\\ w''_{yx} & w''_{yy} & w''_{yz}\\ w''_{zx} & w''_{zy} & w''_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

В точке M

$$\Delta_1=-2<0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} -2 & 0\\ 0 & -2 \end{vmatrix}=4>0\quad \text{и}\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-8<0.$$

Знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса, поэтому точка M является точкой максимума и $w_{\max}=w(M)=14$.

Задача 3. *Найти* локальные *условные экстремумы функции* нескольких переменных $w=x+2y$ при условии $g(x, y)=x^2+y^2-5=0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L = w(x, y) + \lambda g(x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Вычислим частные производные функции Лагранжа и приравняем их нулю. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2 + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы удобно в первых двух уравнениях слагаемые, содержащие множитель λ, перенести в правую часть:

$$\begin{aligned} 1 &= -2\lambda x, \\ 2 &= -2\lambda y. \end{aligned}$$

Затем, поделив друг на друга данные уравнения, получим $\frac{1}{2} = \frac{x}{y}$, откуда $y=2x$. Подставляя это равенство в третье уравнение исходной системы, получаем $x_{1,2}=\pm 1$ и затем $y_{1,2}=\pm 2$, $\lambda_{1,2}=\mp\frac{1}{2}$. Таким образом, мы получили две точки: $M_1=(1; 2; -0{,}5)$, $M_2=(-1; -2; 0{,}5)$.

Далее необходимо составить окаймленную матрицу Гессе

$$H = -\begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Если $\det H > 0$, то функция $w(x, y)$ имеет в соответствующей точке условный минимум, а если $\det H < 0$ — условный максимум. В нашей задаче $\det H(M_1) = -20 < 0$, $\det H(M_2) = 20 > 0$. Следовательно, в точке $P_1 = (1; 2)$ функция $w(x, y)$ имеет условный максимум, а в точке $P_1 = (-1; -2)$ — условный минимум.

Задача 4. *Вычислить наибольшее и наименьшее значения функции $w=x^3+y^3-3xy$ в области D: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.*

Решение. 1. Найдем вначале точки, в которых у данной функции выполняется необходимое условие локального экстремума:

$$\begin{cases} w'_x = 3x^2 - 3y = 0, \\ w'_y = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Из решения системы найдем две стационарные точки $M_1 = (0; 0)$, $M_2 = (1; 1)$. Нас интересуют только точки, принадлежащие рассматриваемой области D (включая границу), т. е. такие, чьи координаты удовлетворяют системе неравенств, задающих саму область. В данном случае обе точки принадлежат D (точка M_1 является граничной точкой, а M_2 — внутренней). В этих точках находим значение функции $w(M_1) = 0$, $w(M_2) = -1$.

2. Исследуем теперь функцию на границе области, т. е. на сторонах заданного прямоугольника.

1) На границе $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$, функция w является функцией одной независимой переменной $w = y^3$. Полученная функция на указанном отрезке возрастает и принимает наименьшее и наибольшее значения на концах отрезка. Таким образом, на данном участке границы области исследуемая функция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения:

$$w_{\min} = w(0; -1) = -1, \quad w_{\max} = w(0; 2) = 8.$$

2) На границе $x = 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$, имеем $w = f(y) = y^3 - 6y + 8$. Вычисляя первую производную полученной функции и приравнивая ее нулю, получаем уравнение $f' = 3y^2 - 6 = 0$. Это уравнение имеет единственное решение$y = \sqrt{2}$, принадлежащее отрезку $-1 \leqslant y \leqslant 2$. Вычисляем значение функции $f(y) = y^3 - 6y + 8$ в данной точке и на концах отрезка: $f(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$, $f(-1) = 13$, $f(2) = 4$. Таким образом, на данном участке границы области исследуемая функция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения:

$$w_{\min} = w(2; \sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}, \quad w_{\max} = w(2; -1) = 13.$$

3) На границе $y = -1$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, имеем $w = g(x) = x^3 + 3x - 1$. Первая производная полученной функции $g' = 3x^2 + 3$ везде положительна, следовательно, функция возрастает и принимает наименьшее и наибольшее значения на концах указанного промежутка. Таким образом, на данном участке границы области исследуемая функция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения:

$$w_{\min} = w(0; -1) = -1, \quad w_{\max} = w(2; -1) = 13.$$

4) На границе $y = 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, имеем $w = h(x) = x^3 - 6x + 8$. Приравнивая нулю первую производную полученной функции $h' = 3x^2 - 6 = 0$, получаем единственную критическую точку на данном отрезке $x = \sqrt{2}$. Вычисляем значение функции $h(x) = x^3 - 6x + 8$

в этой точке и на концах отрезка: $h(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$, $h(0) = 8$, $h(2) = 4$. Таким образом, на данном участке границы области функция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения:

$$w_{\min} = w(\sqrt{2}; 2) = 8 - 4\sqrt{2}, \quad w_{\max} = w(0; 2) = 8.$$

Сравнивая значения функции во всех найденных выше точках, получаем наименьшее и наибольшее значения функции в заданной области:

$$w_{\min} = w(1; 1) = w(0; -1) = -1, \quad w_{\max} = w(2; -1) = 13.$$

§ 1. Локальный экстремум функций нескольких переменных

Найдите локальные экстремумы функций (1.1—1.18).

1.1. $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

1.2. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

1.3. $u = x^3 - 2y^2 - 3x + 8y$.

1.4. $u = x^2 - 2xy + 4y^3$.

1.5. $u = y^3 - 3x^2 - 27y + 12x$.

1.6. $u = x^2 - 4xy + 8y^3$.

1.7. $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

1.8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

1.9. $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

1.10. $f(x, y, z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.

1.11. $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$.

1.12. $u(x, y, z) = 2x^3 - 4xy + 2y^2 + 2xz + 0{,}5z^2 - 8y + 1$.

1.13. $f(x, y, z) = 2x^3 + 2xy + 2xz + y^2 + z^2 + 2y - 8$.

1.14. $u = x^2 + xy + y^2 + z^3 - 12x - 3y - 3z$.

1.15. $u = 3 + 2x - y - 12z - x^2 + xy - y^2 + z^3$.

1.16. $u = 2x^2 + xy + y^2 - z^3 - 9x - 4y + 27z$.

1.17. $u = 1 + 4x + 2y + 24z - x^2 + 2xy - 4y^2 - 2z^3$.

1.18. $u = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$.

1.19. На рисунке изображены линии уровня функции $z = f(x, y)$. Отметьте **верные** утверждения.

1. В точках C и D функция $f(x, y)$ принимает максимальные значения.

2. В точках C и D функция $f(x, y)$ принимает минимальные значения.

3. В точке B функция $f(x, y)$ принимает максимальное значение.

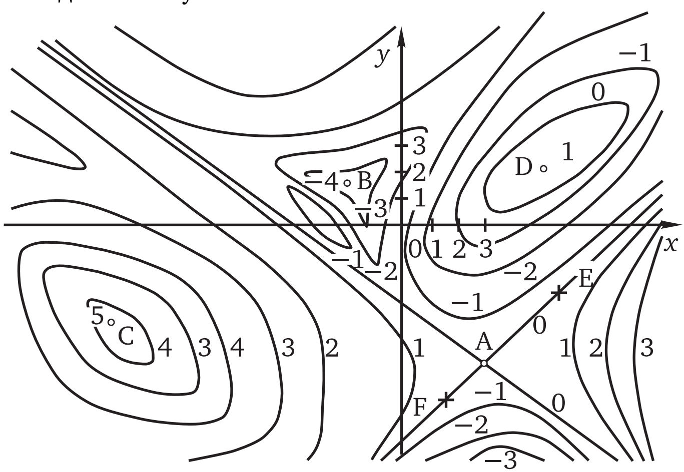
4. В точке B функция $f(x, y)$ принимает минимальное значение.

5. В окрестности точки A поверхность $z = f(x, y)$ имеет вид седла; на линии EF функция $f(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

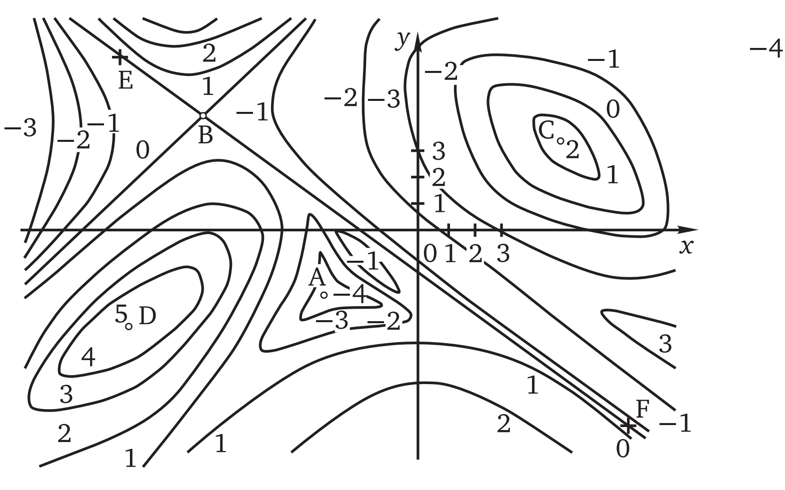
6. В точке A функция $f(x, y)$ принимает минимальное значение.

7. В окрестности точки C поверхность $z = f(x, y)$ имеет вид седла для каждого из случаев а—в.

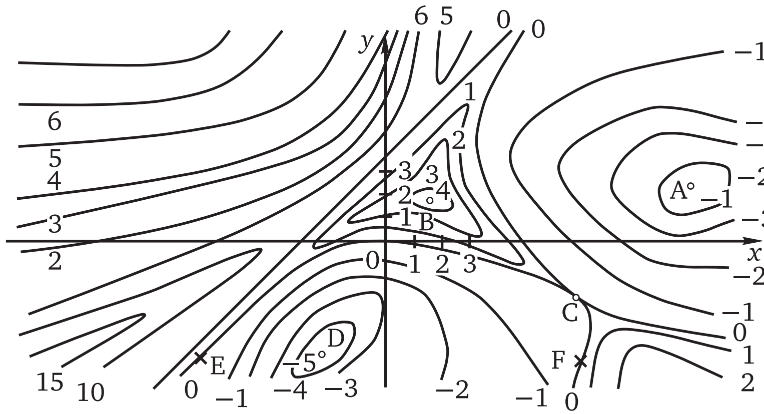
а)



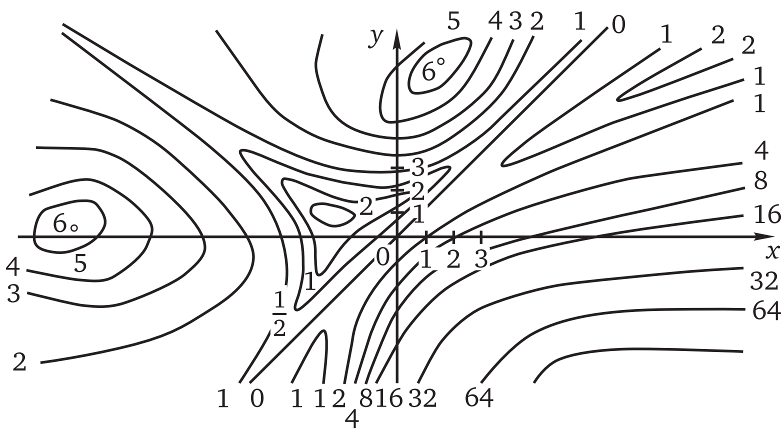
б)



в)



1.20. На рисунке изображены линии уровня функции $z = f(x, y)$.



а) Постройте график функции $z = f(-5, y)$.
б) Постройте график функции $z = f(x, 0)$.
в) Постройте график функции $z = f(1, y)$.

§ 2. Локальный условный экстремум функций нескольких переменных

Используя метод Лагранжа и метод исключения переменной, найдите условные локальные экстремумы функции z при условии (2.1—2.4).

2.1. $z = x^2 y,\ x + y - 2 = 0.$ **2.2.** $z = \dfrac{y}{x^2},\ y - x + 1 = 0.$

2.3. $z = xy^2$, $x + y - 3 = 0$. **2.4.** $z = \dfrac{x}{y^2}$, $x - y + 2 = 0$.

Найдите условные локальные экстремумы функции при заданном условии (2.5—2.18).

2.5. $z = x^2 + y^2 + xy$, $x^2 + y^2 = 2$.

2.6. $z = 2x - 3y$, $x^2 + y^2 - 13 = 0$.

2.7. $z = x^2 + y^2 - 4xy$, $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

2.8. $z = -x - y$, $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 5$.

2.9. $z = e^{x+y}$, $x^2 + y^2 = 2$.

2.10. $z = e^{2x-3y}$, $x^2 + y^2 = 13$.

2.11. $z = e^{-x-y}$, $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 5$.

2.12. $z = e^{xy}$, $x^2 + y^2 = 2$.

2.13. $z = 6 - 5x - 4y$, $x^2 - y^2 = 9$.

2.14. $z = 1 - 4x - 8y$, $x^2 - 8y^2 = 8$.

2.15. $f(x, y) = 2x + 16y$, $xy + y^2 - 7 = 0$.

2.16. $f(x, y) = 2x + 4y$, $2xy + y^2 - 3 = 0$.

2.17. $f(x, y) = 3x - 6y$, $y^2 - xy - 1 = 0$.

2.18. $f(x, y) = 4x + 8y$, $y^2 - 2xy + 5 = 0$.

2.19. Исследуйте точку A на условный экстремум, если в этой точке первый дифференциал функции Лагранжа $L(A, \lambda)$ равен нулю, а второй: $d^2L(A, \lambda) = 7(dx)^2 - 4\,dx\,dy - 5(dy)^2 - 2\,dx\,d\lambda + 6\,dy\,d\lambda$.

2.20. Исследуйте точку A на условный экстремум, если в этой точке первый дифференциал функции Лагранжа $L(A, \lambda)$ равен нулю, а второй: $d^2L(A, \lambda) = 2(dx)^2 - 20\,dx\,dy - 5(dy)^2 + 4\,dx\,d\lambda - 10\,dy\,d\lambda$.

2.21. Градиент функции $f(x, y)$ задан на оси Oy: $\operatorname{grad} f(x, y) = (\cos y; y^4 + 3y^3 + 2y^2)$. Найдите в точках на оси Oy производные функции $f(x, y)$ по направлению оси Oy и исследуйте функцию $f(x, y)$ на условный экстремум на линии условия $x = 0$.

2.22. Градиент функции $f(x, y)$ задан на оси Ox: $\operatorname{grad} f(x, y) = (4x^2 + 3x^3 - x^4; 1 + \sin x)$. Найдите в точках на оси Ox производные функции $f(x, y)$ по направлению оси Ox и исследуйте функцию $f(x, y)$ на условный экстремум на линии условия $y = 0$.

2.23. На линии условия $\varphi(x, y) = 2x + y - 1 = 0$ в семи точках даны градиенты функции двух переменных $f(P) = f(x, y)$:

в точке $A(-3; 7)$ градиент равен $(3; 1)$,

в точке $B(-2; 5)$ — $(2; 1)$, в $C(-1; 3)$ — $(3; 1)$,

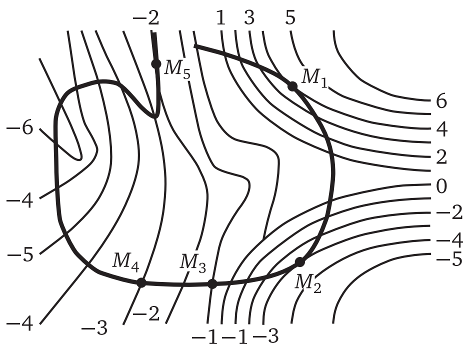
в $D(0; 1)$ — $(4; 2)$, в $E(1; -1)$ — $(1; 1)$,

в $F(2; -3)$ — $(6; 3)$, в $G(3; -5)$ — $(3; 1)$.

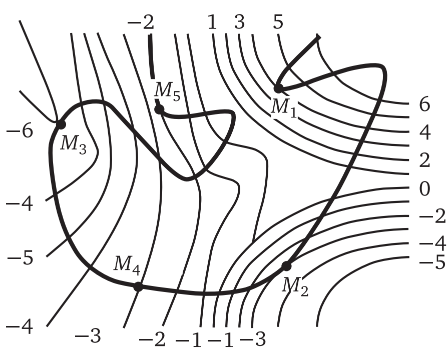
Все точки, «подозрительные» на условный экстремум, находятся среди указанных. Найдите эти точки и исследуйте их на условный экстремум.

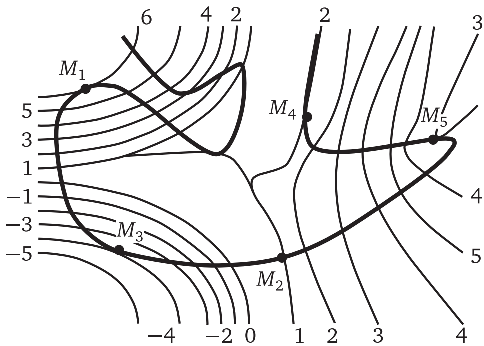
2.24. По предложенным графикам линий уровня функции двух переменных $f(x, y)$ и условия связи $g(x, y) = 0$ (более толстая линия на рисунке) определите наличие или отсутствие у функции $f(x, y)$ условного локального экстремума в точках: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.

а)



б)



в) 

§ 3. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функций нескольких переменных

3.1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции z в области, заданной неравенством:

а) $x^2+y^2\leqslant 5$, $z=5x^2-4xy+2y^2$;

б) $x^2+y^2\leqslant 1$, $z=x+2y$;

в) $x^2+y^2\leqslant 1$, $z=4xy+3y^2$;

г) $x^2+y^2\leqslant 2x$, $z=x^2-y^2$.

3.2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции z в области, ограниченной осями координат и заданной прямой.

а) $z=x^2+2y^2-2x-8y+5$, $x+y-4=0$;

б) $z=x^2+y^2-xy+x+y$, $x+y+3=0$;

в) $z=x^2+y^2-xy-4x$, $2x+3y-12=0$.

3.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$z=xy+x+y$$

в области, ограниченной прямыми $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$.

3.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$z=x^3+y^3-3xy$$

в области $0\leqslant x\leqslant 2$, $-1\leqslant y\leqslant 2$.

3.5. Найдите наименьшее значение функции z в области, определяемой неравенствами

а) $x\geqslant -4$, $y\leqslant 4$, $y-x\geqslant 4$, $z=x^2+y^2-6y$;

б) $x\leqslant 3$, $y\geqslant -3$, $y-x\leqslant 0$, $z=x^2-4x+y^2$.

3.6. Найдите наибольшее значение функции z в области, определяемой неравенствами

а) $x \leqslant 3,\ y \geqslant 0,\ y - x \leqslant -3,\ z = x - y^2 + 4y$;

б) $x \leqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y - x \leqslant 2,\ z = x^2 + 2x - y$

3.7. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 2x - 2y$ при условиях $3x - 2y \geqslant -6,\ 3x + y \geqslant 3,\ 0 \leqslant x \leqslant 3,\ y \geqslant 0$. Сделайте рисунок.

3.8. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = 3x + y$ при условиях $x + y \geqslant 4,\ x - y \leqslant 0,\ x \geqslant 1,\ y \leqslant 8$. Сделайте рисунок.

3.9. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 3 - x - y$ при условиях $3x + 2y \geqslant 6,\ 2x - y \geqslant -3,\ 0 \leqslant x \leqslant 4,\ y \geqslant 0$. Сделайте рисунок.

3.10. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = 3 + x + 2y$ при условиях $x + y \geqslant 6,\ y - x \geqslant 0,\ x \geqslant 2,\ y \leqslant 10$. Сделайте рисунок.

3.11. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 2x + 3y$, если $x + 2y \leqslant 10,\ x + y \leqslant 6,\ 2x + y \leqslant 9,\ x \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$. Сделайте рисунок.

Ответы к главе 7

§ 1

1.1. $(1;2)$ — точка максимума. **1.2.** $(0;3)$ — точка максимума.
1.3. $(1;2)$ — нет экстремума, $(-1;2)$ — точка максимума.
1.4. $(0;0)$ — нет экстремума, $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$ — точка минимума.
1.5. $(2;-3)$ — точка максимума, $(2;3)$ — нет экстремума.
1.6. $(0;0)$ — нет экстремума, $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ — точка минимума.
1.7. $(3;2)$ — точка минимума, $(-3;-2)$ — точка максимума.
1.8. $(-1;-2;3)$ — точка минимума.
1.9. $(0;0;1)$ — нет экстремума, $(24;-144;-1)$ — точка минимума.
1.10. $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ — точка минимума, $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ — нет экстремума.
1.11. $\left(1;-2;\frac{1}{2}\right)$ — точка минимума, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{4};-\frac{1}{4}\right)$ — нет экстремума.
1.12. $(2;4;-4)$ — точка минимума, $\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ — нет экстремума.
1.13. $(1;-2;-1)$ — точка минимума, $\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ — нет экстремума.
1.14. $(7;-2;1)$ — точка минимума, $(7;-2;-1)$ — нет экстремума.
1.15. $(1;0;-2)$ — точка максимума, $(1;0;2)$ — нет экстремума.
1.16. $(2;1;-3)$ — точка минимума, $(2;1;3)$ — нет экстремума.
1.17. $(3;1;2)$ — точка максимума, $(3;1;-2)$ — нет экстремума.
1.18. $(2;-6;1)$ — точка минимума, $(0;0;1)$ — нет экстремума.
1.19. **а)** 1, 4, 3; **б)** 1, 6; **в)** 3, 7.

§ 2

2.1. $(0;2)$ — точка минимума, $\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ — точка максимума.
2.2. $(2;1)$ — точка максимума.
2.3. $(3;0)$ — точка минимума, $(1;2)$ — точка максимума.
2.4. $(2;4)$ — точка максимума.
2.5. $(1;1)$, $(-1;-1)$ — точки максимума,
$(-1;1)$, $(1;-1)$ — точки минимума.
2.6. $(2;-3)$ — точка максимума,
$(-2;3)$ — точка минимума.
2.7. $(-1;1)$, $(1;-1)$ — точки максимума,
$(1;1)$, $(-1;-1)$ — точки минимума.
2.8. $(-4;-1)$ — точка максимума, $(4;1)$ — точка минимума.
2.9. $(1;1)$ — точка максимума, $(-1;-1)$ — точка минимума.
2.10. $(2;-3)$ — точка максимума, $(-2;3)$ — точка минимума.

2.11. (4; 1) — точка минимума, (−4; −1) — точка максимума.
2.12. (1; 1), (−1; −1) — точка максимума,
(−1; 1), (1; −1) — точка минимума.
2.13. (−5; 4) — точка минимума, (5; −4) — точка максимума.
2.14. (−4; 1) — точка минимума, (4; −1) — точка максимума.
2.15. (6; 1) — точка минимума, (−6; −1) — точка максимума.
2.16. (1; 1) — точка минимума, (−1; −1) — точка максимума.
2.17. (0; −1) — точка минимума, (0; 1) — точка максимума.
2.18. (3; 1) — точка минимума, (−3; −1) — точка максимума.
2.19. $\det H = 46 \Rightarrow A$ — условный минимум.
2.20. $\det H = -170 \Rightarrow A$ — условный максимум.
2.21. (0; −2) — условный максимум,
(0; −1) — условный минимум, (0; 0) – критическая точка.
2.22. (−1; 0) — условный минимум, (4; 0) — условный максимум,
(0; 0) — критическая точка.
2.23. Точка B критическая, D — условный максимум,
F — условный минимум.
2.24. **а)** M_1 — условный максимум, M_2 — условный минимум,
M_3 — в точке отсутствует условный экстремум, M_4 — в точке отсутствует условный экстремум, M_5 — нестрогий условный максимум;
б) M_1 — условный минимум, M_2 — условный минимум,
M_3 — условный минимум, M_4 — в точке отсутствует условный экстремум,
M_5 — нестрогий условный максимум;
в) M_1 — условный максимум, M_2 — в точке отсутствует условный экстремум, M_3 — условный минимум, M_4 — нестрогий условный минимум,
M_5 — условный минимум.

§ 3

3.1. **а)** Наименьшее значение $z(0; 0) = 0$,
наибольшее значение $z(-2; 1) = z(2; -1) = 30$.
б) Наибольшее значение $z\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$,
наименьшее значение $z\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$.
в) Наибольшее значение $z\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 4$,
наименьшее значение $z\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = z\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{12}{5}$.
г) Наибольшее значение $z(2; 0) = 4$,
наименьшее значение $z\left(\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.
3.2. **а)** Наибольшее значение $z(4; 0) = 13$,
наименьшее значение $z(1; 2) = -4$.

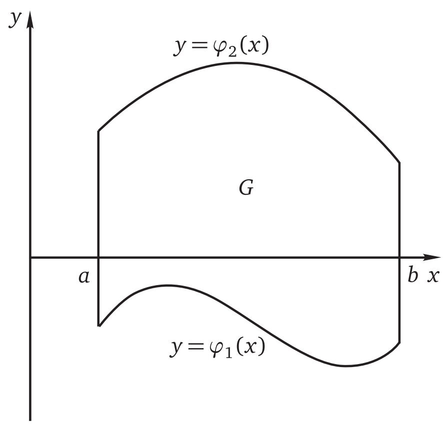
б) Наибольшее значение $z(-3;0)=z(0;-3)=6$,
наименьшее значение $z(-1;-1)=-1$.
в) Наибольшее значение $z(0;4)=16$,
наименьшее значение $z\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)-\frac{16}{3}$.
3.3. Наибольшее значение $z(2;3)=11$, наименьшее значение $z(1;2)=5$.
3.4. Наибольшее значение $z(2;-1)=13$,
наименьшее значение $z(1;1)=z(0;-1)=-1$.
3.5. **а)** Наименьшее значение $z(-0{,}5;3{,}5)=-8{,}5$.
б) Наименьшее значение $z(2{,}5;-0{,}5)=-3{,}5$.
3.6. **а)** Наибольшее значение $z(3;2)=7$.
б) Наименьшее значение $z(-0{,}5;1{,}5)=-2{,}25$.
3.7. Наибольшее значение $f(3;0)=6$.
3.8. Наименьшее значение $f(1;3)=6$.
3.9. Наибольшее значение $f(2;0)=1$.
3.10. Наименьшее значение $f(3;3)=12$.
3.11. Наибольшее значение $f(2;4)=16$.

Глава 8

Двойной интеграл

Справочный материал и примеры решения задач

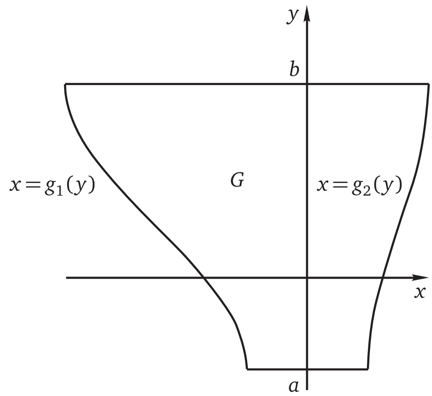
1. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области интегрирования G, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиками непрерывных функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$,



то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области G вычисляется повторным интегрированием по формуле:

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

2. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области интегрирования G, ограниченной прямыми $y = a$, $y = b$ $(a < b)$ и графиками непрерывных функций $x = g_1(y)$ и $x = g_2(y)$, $g_1(y) \leqslant g_2(y)$,

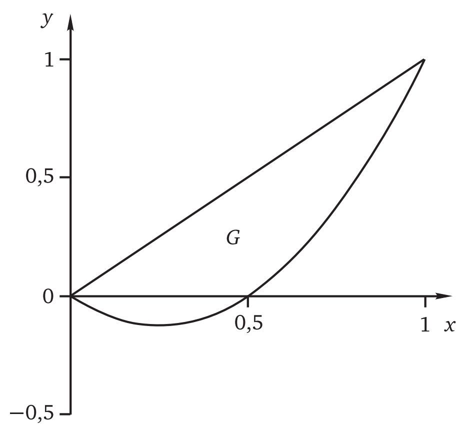


то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области G вычисляется повторным интегрированием по формуле:

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

Задача 1. Вычислите интеграл $\iint\limits_G (x + 2y)\,dx\,dy$ по области G, ограниченной линиями $y = x$ и $y = 2x^2 - x$.

Изобразим область интегрирования на плоскости xOy:



Видно, что данный двойной интеграл следует вычислять первым методом. Тогда

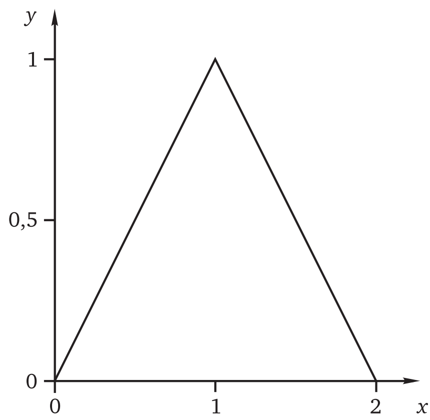
$$\iint\limits_G (x+2y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2-x}^{x} (x+2y)\,dy = \int\limits_0^1 dx(xy+y^2)\Big|_{y=2x^2-x}^{y=x} =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^2+x^2-x(2x^2-x)-(2x^2-x)^2)\,dx = \int\limits_0^1 (-4x^4+2x^3+2x^2)\,dx =$$

$$= -\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{11}{30}.$$

Задача 2. Вычислите интеграл $\iint\limits_G (2x+1)\,dx\,dy$ по области G, ограниченной линиями $y=x$ и $y=2-x$ и $y=0$.

Изобразим область интегрирования на плоскости xOy:



Если для вычисления двойного интеграла применить первый метод повторного интегрирования, то получим что

$$\iint\limits_G (2x+1)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (2x+1)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} (2x+1)\,dy.$$

Такой метод расстановки пределов интегрирования приводит к необходимости проводить повторное интегрирование дважды. Поэтому в данном случае воспользуемся вторым методом повторного интегрирования:

$$\iint\limits_G (2x+1)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} (2x+1)\,dx = \int\limits_0^1 dy\,(x^2+x)\Big|_{x=y}^{x=2-y} =$$

$$= \int\limits_0^1 ((2-y)^2+2-y-y^2-y)\,dy = \int\limits_0^1 (-6y+6)\,dy = -3+6=3.$$

§1. Двойной интеграл

Изобразите область интегрирования на плоскости. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле (1.1—1.11).

1.1. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x}^{1} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)\,dy.$

1.2. $\int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{y^2}^{9} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^3 dy \int\limits_{3y}^{9} f(x,y)\,dx.$

1.3. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x+1} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{1} f(x,y)\,dy.$

1.4. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2y-2}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx.$

1.5. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^{-y} f(x,y)\,dx.$

1.6. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^3} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)\,dx.$

1.7. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{-y}}^{2} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y}^{2} f(x,y)\,dx.$

1.8. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy.$

1.9. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_0^{6-x} f(x,y)\,dy.$

1.10. $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^3 dy \int\limits_{2-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx.$

1.11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$

Изобразите область интегрирования на плоскости. Измените порядок интегрирования и найдите интеграл (1.12—1.13).

1.12. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{y} f'(x^2)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f'(x^2)\,dx.$

1.13. $\int\limits_{1/2}^1 dy \int\limits_{1/y}^{2} f'(\ln x)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^{2/y} f'(\ln x)\,dx.$

Вычислите интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ по области D, ограниченной заданными линиями (1.14—1.21).

1.14. $\iint\limits_D x\,dx\,dy;\ D:\ y=\sqrt{x},\ y=x.$

1.15. $\iint\limits_D 2y\,dx\,dy;\ D:\ y=-x^3,\ y=1,\ x=0.$

1.16. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x};\ D:\ y=\ln x,\ y=-\frac{x}{e}+2,\ y=2.$

1.17. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy;\ y=x,\ xy=1,\ y=2.$

1.18. $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy;\ y=2-x^2,\ y=2x-1.$

1.19. $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy;\ x=0,\ y=0,\ x+y=2.$

1.20. $\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy;\ y=x,\ x+y=2,\ x=0.$

1.21. $\iint\limits_D (2y^3 - x)\,dx\,dy$; $y = x + 2$, $x = 0$, $y = 0$.

Изобразите область D и найдите интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$. Объясните совпадение ответов в п. а) и б) (1.22—1.26).

1.22. $f(x, y) = 4x + 1$ **а)** $D = \left\{0 \leqslant x \leqslant 3;\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\right\}$;
б) $D = \left\{0 \leqslant y \leqslant 9;\ \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 3\right\}$.

1.23. $f(x, y) = 15y$ **а)** $D = \left\{0 \leqslant x \leqslant 1;\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 0\right\}$;
б) $D = \left\{-1 \leqslant y \leqslant 0;\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y+1}\right\}$.

1.24. $f(x, y) = 5y$ **а)** $D = \{0 \leqslant x \leqslant 3, -x \leqslant y \leqslant x^2\}$;
б) $D = \{-3 \leqslant y \leqslant 0, -y \leqslant x \leqslant 3\} \cup \{0 \leqslant y \leqslant 9, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 3\}$.

1.25. $f(x, y) = 2x + y$ **а)** область D ограничена линиями $x = 3y$, $x = 0$, $y = 1$;

б) область D ограничена линиями $y = 3x$, $y = 0$, $x = 1$.

1.26. **а)** Область D ограничена линиями $x = 6y$, $x = 0$, $y = 1$; $f(x, y) = x + 2y$;

б) область D ограничена линиями $y = 6x$, $y = 0$, $x = 1$; $f(x, y) = 2x + y$.

Найдите интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$. Сравните результат с объемом соответствующего тела (1.27—1.38).

1.27. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 2;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $f(x, y) = 3$.

1.28. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 2;\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$, $f(x, y) = 3$.

1.29. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 2;\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$, $f(x, y) = 3y$.

1.30. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 2;\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$, $f(x, y) = 3x$.

1.31. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 2;\ -x \leqslant y \leqslant x\}$, $f(x, y) = 3y$.

1.32. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 2, -x \leqslant y \leqslant x\}$, $f(x, y) = 3x$.

1.33. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$, $f(x, y) = 6x$.

1.34. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$, $f(x, y) = 6y$.

1.35. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$, $f(x, y) = 6(1 - x - y)$.

1.36. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ x - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$, $f(x, y) = 6x$.

1.37. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ x - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$, $f(x, y) = 6y$.

1.38. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ x - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$, $f(x, y) = 6(1 - x - y)$.

Ответы к главе 8

§1

1.1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{1-y} f(x,y)\,dx.$

1.2. $\int\limits_0^9 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\frac{x}{3}} f(x,y)\,dy.$

1.3. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx.$

1.4. $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_{-x/2-1}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$

1.5. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{x^3}^{-x} f(x,y)\,dy.$

1.6. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{2-x} f(x,y)\,dy.$

1.7. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-x^2}^{x} f(x,y)\,dy.$

1.8. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$

1.9. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{6-y} f(x,y)\,dx.$

1.10. $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2-1}^{\sqrt{5-x^2+4x}} f(x,y)\,dy.$

1.11. $\int\limits_{-1}^2 dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx.$

1.12. $\frac{1}{2}(f(4)-f(0)) = \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f'(x^2)\,dy.$

1.13. $f(\ln 2)-f(0) = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{2/x} f'(\ln x)\,dy.$

1.14. $\frac{1}{15}$. **1.15.** $\frac{6}{7}$. **1.16.** $\frac{1}{2}-2\ln 2$. **1.17.** $\frac{9}{4}$.

1.18. $\frac{64}{15}$. **1.19.** $\frac{8}{3}$. **1.20.** $\frac{1}{6}$. **1.21.** $\frac{68}{15}$.

1.22. 90. **1.23.** −4. **1.24.** 99. **1.25.** 4.

1.26. 10. **1.27.** 6. **1.28.** 6. **1.29.** 4.

1.30. 8. **1.31.** 0. **1.32.** 16. **1.33.** 1.

1.34. 1. **1.35.** 1. **1.36.** 2. **1.37.** 0. **1.38.** 4.

Глава 9

Варианты контрольных работ

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Найдите длину проекции вектора $\vec{a} = (-2; 3; -1; 4)$ на вектор $\vec{b} = (1; 0; 2; 2)$.

2. Решите систему линейных уравнений и запишите общее решение этой системы в векторном виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -7, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -5. \end{cases}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1; 3; 1)$, $B(2; 3; 0)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(a + 2; 4; 0)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов.)

4. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 5 & -12 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите алгебраическое дополнение A_{23} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите координаты точки, симметричной точке $P(-1; 2; 0)$ относительно плоскости $4x - 5y - z - 7 = 0$.

7. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (-3; 1; a - 1)$?

Вариант 2

1. Найдите $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$.

2. Решите систему линейных уравнений и запишите общее решение этой системы в векторном виде:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -6, \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(0; 3; -1)$, $B(2; 8; 7)$, $C(1; 0; 4-a)$ и $D(0; 8; 9)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов.)

4. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите минор M_{32} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите координаты точки, симметричной точке $P(2; -1; 1)$ относительно плоскости $x - y + 2z - 2 = 0$.

7. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a-4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (2; 3; a-1)$?

Вариант 3

1. Найдите длину проекции вектора $\vec{a} = (1; 2; 5; 1)$ на вектор $\vec{b} = (2; 1; 0; -2)$.

2. Решите систему линейных уравнений и запишите общее решение этой системы в векторном виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 11, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1;2;1)$, $B(3;6;4)$, $C(5;9;a+3)$ и $D(3;2;0)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов.)

4. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -10 \\ 6 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите алгебраическое дополнение A_{43} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите координаты точки, симметричной точке $P(1;1;1)$ относительно плоскости $x+4y+3z+5=0$.

7. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ a-1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (1;3;a-2)$?

Вариант 4

1. Найдите $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=2$.

2. Решите систему линейных уравнений и запишите общее решение этой системы в векторном виде:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1; 2; 3)$, $B(a+8; 3; 1)$, $C(3; 3; 3)$ и $D(2; 3; 4)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов.)

4. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите минор M_{13} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите координаты точки, симметричной точке $P(-1; 0; -1)$ относительно плоскости $2x+6y-2z+11=0$.

7. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v}=(a-1; 1; -5)$?

Вариант 5

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+11x_2+5x_3+90x_4 = 0, \\ 4x_1+44x_2+21x_3+400x_4 = 1 \end{cases}$$

в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

2. При каком значении параметра a система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3 = 0, \\ 2x_1+x_2+x_3 = 3, \\ 4x_1+4x_3 = a \end{cases} \quad \text{совместна?}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1; 3; 1)$, $B(2; 3; 0)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(a+2; 4; 0)$ лежат в одной плоскости?

4. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -12 & -2 \\ -2 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственными векторами матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующими различными собственными значениями.

6. При каком значении параметра a плоскости $2x+y-z+9=0$ и $(2a+2)x+(2a-1)y-3z+7=0$ параллельны?

7. Вычислите
$$\det\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 5x_3 + 50x_4 = 1, \\ 3x_1 - 30x_2 + 16x_3 + 167x_4 = 0 \end{cases}$$
в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

2. При каком значении параметра a система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + (a+9)x_3 = 6 \end{cases} \qquad \text{совместна?}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(0;3;-1)$, $B(2;8;7)$, $C(1;0;4-a)$ и $D(0;8;9)$ лежат в одной плоскости?

4. Решите матричное уравнение
$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственными векторами матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, соответствующим различным собственным значениям.

6. При каком значении параметра a прямая $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$ и плоскость $2x+(a+2)y-2z+11=0$ перпендикулярны?

7. Вычислите

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+20x_2+3x_3+20x_4=0, \\ 5x_1+100x_2+14x_3+89x_4=1 \end{cases}$$

в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

2. При каком значении параметра a система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3, \\ 2x_1+6x_2-5x_3=7, \\ x_1+6x_2-7x_3=a+3 \end{cases}$$

совместна?

3. При каком значении параметра a точки $A(1;2;1)$, $B(3;6;4)$, $C(5;9;a+3)$ и $D(3;2;0)$ лежат в одной плоскости?

4. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственными векторами матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, соответствующим различным собственным значениям.

6. При каком значении параметра a прямые $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{6}=\dfrac{z+2}{3}$ и $\dfrac{x-6}{4+a}=\dfrac{y+4}{5+a}=\dfrac{z+3}{-2-a}$ параллельны?

7. Вычислите

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1-22x_2+4x_3+40x_4=1, \\ 3x_1-66x_2+11x_3+127x_4=0 \end{cases}$$

в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

2. При каком значении параметра a система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+x_2-4x_3=4, \\ x_1+8x_2+(a-7)x_3=5 \end{cases} \qquad \text{совместна?}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1;2;3)$, $B(a+8;3;1)$, $C(3;3;3)$ и $D(2;3;4)$ лежат в одной плоскости?

4. Решите матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственными векторами матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, соответствующим различным собственным значениям.

6. При каком значении параметра a прямая $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ и плоскость $x+y+az-4=0$ параллельны?

7. Вычислите

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Вычислите $\max\limits_{[0;3]}(2x^3-3x^2-12x+1)$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3}, \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению $t=1$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $M(-1;\,2)$ к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно:

$$\ln(x+y)+x^2e^{2x+y}-\frac{1}{4}y^3+1=0.$$

4. Проведя необходимое исследование функции

$$y = 2x+3-\frac{8}{(x+5)^2},$$

постройте эскиз ее графика.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y=\sqrt{x^3}$ в точке $x=1{,}02$.

6. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^4 \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int (2x+1)\sin 3x\,dx.$$

Вариант 2

1. Вычислите $\min\limits_{[-3;0]}(2x^3+3x^2-12x-1)$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3+2\ln t}{t}, \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению $t=1$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $M(2;\,1)$ к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно $x^3+\ln y^2-x^2e^{y-1}=4$.

4. Проведя необходимое исследование функции

$$y = -4x + 1 + \frac{1}{(x-2)^4},$$

постройте эскиз ее графика.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt{3x+1}$ в точке $x = 0{,}98$.

6. Найдите определенный интеграл $\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx$.

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int (2x+5)e^{3x}\,dx.$$

Вариант 3

1. Вычислите $\max\limits_{[0;4]}(2x^3 - 3x^2 - 36x + 2)$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}, \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению $t = -1$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $M(1;\,1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$4\sqrt{3+\frac{x}{y}} + 3xy^3 + e^{y-x} = 12.$$

4. Проведя необходимое исследование функции

$$y = x - 1 + \frac{27}{(x+1)^3},$$

постройте эскиз ее графика.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x = 0{,}97$.

6. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

7. Найдите неопределенный интеграл $\int (3x-1)\cos 2x\,dx$.

Вариант 4

1. Вычислите $\min\limits_{[-4;0]}(2x^3+3x^2-36x-2)$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2, \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению $t=-\frac{1}{2}$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $M(2;\,1)$ к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно:

$$3\sqrt{2x^2+y^2}+x^2y^2-\frac{8}{3}y^3=\frac{31}{3}.$$

4. Проведя необходимое исследование функции

$$y=-5x+4-\frac{1}{(x-1)^5},$$

постройте эскиз ее графика.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y=\sqrt{3x-2}$ в точке $x=1{,}04$.

6. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{2\ln x+1}{x}\,dx$.

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int(2x+2)e^{2x}\,dx.$$

Вариант 5

1. Найдите точки экстремума функции $y=f(x^3-9x^2+24x+10)$ и укажите их тип, если $f(x)$ — дифференцируемая монотонно убывающая функция, определенная на всей числовой прямой и не имеющая критических точек.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 2t^2-3t+1, \\ x = -t^2+2t+4, \end{cases}$$

в точке, соответствующей $t=2$.

3. Ограничившись тремя членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0{,}5)$, где $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - 2 - x^2$.

4. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ и постройте эскиз ее графика (ограничьтесь первой производной).

5. Используя правило нахождения производной сложной функции, найдите $g'(1)$, если $g(x) = f(f(x))$, где $f(x) = x^2 - 2$.

6. Используя подходящую замену переменной, вычислите определенный интеграл

$$\int\limits_0^1 x(2-x^2)^5\,dx.$$

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int (2x+3)\ln x\,dx.$$

Вариант 6

1. Найдите точки экстремума функции $y = f(5+45x-3x^2-x^3)$ и укажите их тип, если $f(x)$ — дифференцируемая монотонно убывающая функция, определенная на всей числовой прямой и не имеющая критических точек.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 2t^2 + 4t - 10, \\ x = 4t^2 - 12t + 7, \end{cases}$$

в точке, соответствующей $t = 2$.

3. Ограничившись тремя членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0{,}5)$, где $f(x) = e^{2x} - 1 - 2x$.

4. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ и постройте эскиз ее графика (ограничьтесь первой производной).

5. Используя правило нахождения производной сложной функции, найдите $g'(1)$, если $g(x) = f(f(x))$, где $f(x) = x^3 + 1$.

6. Используя подходящую замену переменной, вычислите определенный интеграл

$$\int\limits_3^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int x\sin(3x+2)\,dx.$$

Вариант 7

1. Найдите точки экстремума функции $y=f(2x^3-3x^2-36x+20)$ и укажите их тип, если $f(x)$ — дифференцируемая монотонно убывающая функция, определенная на всей числовой прямой и не имеющая критических точек.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = -t^2+5t+3, \\ x = 2t^2-3t, \end{cases}$$

в точке, соответствующей $t=-1$.

3. Ограничившись тремя членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0{,}5)$, где $f(x)=6\ln(1+x^2)-6x^2+3x^4$.

4. Исследуйте функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ и постройте эскиз ее графика (ограничьтесь первой производной).

5. Используя правило нахождения производной сложной функции, найдите $g'(1)$, если $g(x)=f(f(x))$, где $f(x)=3x^2-x$.

6. Используя подходящую замену переменной, вычислите определенный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{2x+1})\sqrt{2x+1}}$.

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int xe^{2x+1}\,dx.$$

Вариант 8

1. Найдите точки экстремума функции $y=f(1+12x-3x^2-2x^3)$ и укажите их тип, если $f(x)$ — дифференцируемая монотонно убывающая функция, определенная на всей числовой прямой и не имеющая критических точек.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 5t^2 - 2t - 5, \\ x = t^2 + 4t - 1, \end{cases}$$

в точке, соответствующей $t=-1$.

3. Ограничившись тремя членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0{,}5)$, где $f(x)=3\cos 2x-3+6x^2$.

4. Исследуйте функцию $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$ и постройте эскиз ее графика (ограничьтесь первой производной).

5. Используя правило нахождения производной сложной функции, найдите $g'(1)$, если $g(x)=f(f(x))$, где $f(x)=2x^2-3x$.

6. Используя подходящую замену переменной, вычислите несобственный интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int (x+1)\cos 2x\,dx.$$

Зачетная контрольная работа

Вариант 1

1. а) В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в базисе } e_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В ответе укажите координаты элемента A в данном базисе.

б) Сделайте проверку.

2. Найдите собственные векторы, соответствующие меньшему собственному значению матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+8n-7}-2n\right)$.

4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\sqrt{1+3x^2}-1}$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке (0; 1) к графику функции $y=y(x)$, заданной уравнением $e^x+\sqrt{x+y}=y+1$.

6. Проведите исследование функции $y=2x+3-\dfrac{8}{(x+5)^2}$ и постройте эскиз ее графика.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y=\sqrt{x^3}$ в точке $x=1{,}02$.

Вариант 2

1. а) В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{в базисе } e_1=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad e_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_3=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

В ответе укажите координаты элемента A в данном базисе.

б) Сделайте проверку.

2. Найдите собственные векторы, соответствующие меньшему собственному значению матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2-3}+\sqrt[3]{n^3+4}}{\sqrt[5]{n^5-2}}$.

4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)(\ln(4x-1)-\ln(4x+5))$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке (1; 1) к графику функции $y=y(x)$, заданной уравнением $x^3-xy+3y^2=3$.

6. Проведите исследование функции $y=x-1+\dfrac{27}{(x+1)^3}$ и постройте эскиз ее графика.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y=\sqrt{3x+1}$ в точке $x=0{,}98$.

Вариант 3

1. а) В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

$$A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&-2\end{pmatrix}\quad\text{в базисе } e_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}1&4\\4&-3\end{pmatrix}.$$

В ответе укажите координаты элемента A в данном базисе.

б) Сделайте проверку.

2. Найдите собственные векторы, соответствующие меньшему собственному значению матрицы

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&2&2\\-1&0&4\end{pmatrix}.$$

3. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)^8(n^2+5)}{(2n-3)^2(n+7)^4(n-1)^4}$.

4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x^3)}{(e^{3x^2}-1)\sin 2x}$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(1;\,1)$ к графику функции $y=y(x)$, заданной уравнением $\sqrt{xy}+\ln y=x^5$.

6. Проведите исследование функции $y=-4x+1+\dfrac{1}{(x-2)^4}$ и постройте эскиз ее графика.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ в точке $x=0{,}97$.

Вариант 4

1. а) В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

$$A=\begin{pmatrix}-3&7\\7&4\end{pmatrix}\quad\text{в базисе } e_1=\begin{pmatrix}-2&2\\2&1\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

В ответе укажите координаты элемента A в данном базисе.

б) Сделайте проверку.

2. Найдите собственные векторы, соответствующие большему собственному значению матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-3}-\sqrt[3]{8n^3+2}}{6n+\sqrt[4]{n^4+1}}$.

4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)(\ln(2x-3)-\ln(2x+4))$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(0; 1)$ к графику функции $y=y(x)$, заданной уравнением $y+\ln(x+y)=2x+1$.

6. Проведите исследование функции $y=-5x+4-\dfrac{1}{(x-1)^5}$ и постройте эскиз ее графика.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y=\sqrt{3x-2}$ в точке $x=1{,}04$.

Вариант 5

1. В какой точке линия пересечения плоскостей $3x+2y+z-5=0$ и $x+y-z=0$ пересекает плоскость $4x-y+5z-3=0$? Сделайте проверку.

2. Найдите фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1-x_3+2x_4=0, \\ 3x_1-2x_2-4x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+14x_4=0 \end{cases}$$

и запишите общее решение этой системы в векторном виде.

3. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственным вектором, соответствующим меньшему собственному значению матрицы $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, и осью Oy.

4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4\sqrt{x^6-1}-2x^5}{7x^5+3x^3}$.

5. Найдите точку максимума функции

$$f(x)=1-x-2x^2-x^3.$$

6. Проведя необходимое исследование функции $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$, постройте эскиз ее графика (при исследовании производной рекомендуется ограничиться первой производной).

7. Найдите первообразную функции $f(x) = (2x+5)e^{3x}$, график которой проходит через точку $(0; 2)$.

Вариант 6

1. В какой точке линия пересечения плоскостей $2x + y - z - 5 = 0$ и $x - 2y + 2z + 5 = 0$ пересекает плоскость $7x + y + z - 14 = 0$? Сделайте проверку.

2. Найдите фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 10x_2 + 6x_3 - 12x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

и запишите общее решение этой системы в векторном виде.

3. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственным вектором, соответствующим меньшему собственному значению матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, и осью Ox.

4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x^2} - 1}{\cos 3x - 1}$.

5. Найдите абсциссу точки минимума функции

$$f(x) = 5 - x + x^2 + x^3.$$

6. Проведя необходимое исследование функции $y = \dfrac{x^2}{(x+4)^2}$, постройте эскиз ее графика (при исследовании производной рекомендуется ограничиться первой производной).

7. Найдите первообразную функции $f(x) = (2x+3)\cos 3x$, график которой проходит через точку $(\pi; 1)$.

Вариант 7

1. В какой точке линия пересечения плоскостей $x - 3y - z + 4 = 0$ и $-2x + 7y + 2z - 10 = 0$ пересекает плоскость $3x + 2y - 4z - 9 = 0$? Сделайте проверку.

2. Найдите фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_4=0, \\ -4x_2-2x_3+3x_4=0, \\ x_1+14x_2+8x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

и запишите общее решение этой системы в векторном виде.

3. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственным вектором, соответствующим меньшему собственному значению матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, и осью Oy.

4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x}{3\sqrt{x^4-4}+x}$.

5. Найдите точку максимума функции

$$f(x)=-3+5x-x^2-x^3.$$

6. Проведя необходимое исследование функции $y=\dfrac{27-2x^3}{6x^2}$, постройте эскиз ее графика (при исследовании производной рекомендуется ограничиться первой производной).

7. Найдите первообразную функции $f(x)=\dfrac{x^4}{e-x^5}$, график которой проходит через точку $(0; 0)$.

Вариант 8

1. В какой точке линия пересечения плоскостей $-2x+3y+z-2=0$ и $3x+6y+2z-11=0$ пересекает плоскость $x+2y+z-4=0$? Сделайте проверку.

2. Найдите фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-2x_4=0, \\ 5x_1-2x_2+x_3+7x_4=0 \end{cases}$$

и запишите общее решение этой системы в векторном виде.

3. Найдите $|\cos\varphi|$, где φ — угол между собственным вектором, соответствующим меньшему собственному значению матрицы $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, и осью Ox.

4. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^3)}{\sin 2x(\sqrt{1+x^2+2x^3}-1)}$.

5. Найдите точку минимума функции

$$f(x)=1-4x-x^2+2x^3.$$

6. Проведя необходимое исследование функции $y=\dfrac{4x^2+3x}{x+1}$, постройте эскиз ее графика (при исследовании производной рекомендуется ограничиться первой производной).

7. Найдите первообразную функции $f(x)=x^2\exp(8-x^3)$, график которой проходит через точку $(2; 1)$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$. Докажите, что

$$f(x_0+at)-f(x_0)=k\cdot t+o(t)$$

при $t\to 0$ и найдите k.

2. Чему равен определитель квадратной матрицы, имеющей собственное значение $\lambda=0$? Ответ обосновать.

3. Найдите ближайшую к точке $(0; 0; -4)$ точку $M(x_1; x_2; x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1+4x_2-5x_3=-6,\\ 2x_1+4x_2+10x_4=12. \end{cases}$$

4. Решите матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -7\\ 1 & 1\\ 5 & 7\end{pmatrix}.$$

5. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 2a-2 & 4\end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v}=(a-1; 1; -5)$?

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке (1; 1) к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением $\sqrt{xy}+\ln y=x^5$.

7. Найдите определенный интеграл $\int\limits_1^2 e^{3/\sqrt{t}}\,dt$, если $\int\limits_1^x e^{1/\sqrt{t}}\,dt=F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции

$$u=-2x^3-4y^2-z^2+2yz+24x+2y+4z-9.$$

Укажите их вид.

9. Найдите наименьшее значение функции $z=x^2+y^2-6y$ в области, определяемой неравенствами $x\geqslant-4$, $y\leqslant4$, $y-x\geqslant4$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_G (2x+y)\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $x=3y$, $x=0$, $y=1$.

Вариант 2

1. Пусть $\vec{v}$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda=\lambda_1$, и $\vec{v}$ — собственный вектор матрицы B, соответствующий собственному значению $\lambda=\lambda_2$. Докажите, что $\vec{v}$ — собственный вектор матрицы $C=A\cdot B$. Какому собственному значению он соответствует?

2. Докажите, что если функция $f(x)=f(1)+k(x-1)+o(x-1)$ при $x\to1$, то эта функция имеет производную при $x=1$.Чему равна $f'(1)$?

3. Найдите ближайшую к точке (0; −4; 0) точку $M(x_1, x_2, x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=3,\\ -4x_1+8x_2+2x_3=-12. \end{cases}$$

4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix}2&4\\2&5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&2&8\\-1&1&10\end{pmatrix}$.

5. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix}a+1&0&-1\\2&2&1\\-1&0&4\end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v}=(1;3;a-2)$?

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке (1; 1) к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2+xy+y^2=3$.

7. Найдите определенный интеграл $\int\limits_1^3 e^{-2\sqrt{t}}dt$, если $\int\limits_0^x e^{-\sqrt{t}}dt=F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции

$$u=-x^3+y^2+2z^2+yz+27x-4y-9z-2.$$

Укажите их вид.

9. Найдите наибольшее значение функции $z=x-y^2+4y$ в области, определяемой неравенствами $x\leqslant 3$, $y\geqslant 0$, $y-x\leqslant 0$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями: $x=6y$, $x=0$, $y=1$.

Вариант 3

1. Функция дифференцируема в точке (1; 2). Докажите, что

$$f(1+2t;2+3t)-f(1;2)=k\cdot t+o(t)$$

при $t\to 0$ и найдите k.

2. Докажите, что если $\vec{v}$ — собственный вектор квадратной матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda=5$, и существует обратная матрица A^{-1}, то $\vec{v}$ является собственным вектором матрицы A^{-1}. Какому собственному значению обратной матрицы он соответствует?

3. Найдите ближайшую к точке (0; 0; 2) точку $M(x_1;x_2;x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3=-10, \\ -3x_1+9x_2+5x_3=30. \end{cases}$$

4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ a-2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v}=(-3;1;a-1)$?

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке (1; 1) к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением $xy+\ln y=1$.

7. Найдите определенный интеграл $\int\limits_2^4 e^{-3t^2}dt$, если $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt=F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции

$$u=x^3+y^2+z^2+yz-3x-3y-12z+1.$$

Укажите их вид.

9. Найдите наименьшее значение функции $z=x^2+2x-y$ в области, определяемой неравенствами $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 2$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $y=3x$, $y=0$, $x=1$.

Вариант 4

1. Известно, что $f(1+2t;\,2+3t)-f(1;\,2)=13t+o(t)$ при $t\to 0$. Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x,y)$ в точке $A(1;\,2)$ по направлению вектора $\vec{l}=(2;\,3)$.

2. Пользуясь определением, докажите что $(\sqrt{4-3x^4}-2)\cdot x=o(x^3)$ при $x\to 0$.

3. Найдите ближайшую к точке (0; 4; 0) точку $M(x_1,x_2,x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1+4x_2+2x_3=-5,\\ 2x_1+4x_2-4x_3=10. \end{cases}$$

4. Решите матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\1&2\\-3&-2\end{pmatrix}$.

5. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&a-1&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v}=(2;\,3;\,a-1)$?

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке $(0;1)$ к графику функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением $e^x+\sqrt{x+y}=y+1$.

7. Найдите определенный интеграл $\int\limits_2^4 e^{2/t^2}\,dt$, если $\int\limits_1^x e^{1/t^2}\,dt=F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции

$$u=x^3-y^2-z^2+yz-12x-y+2z+6.$$

Укажите их вид.

9. Найдите наименьшее значение функции $z=x^2-4x+y^2$ в области, определяемой неравенствами $x\leqslant 3$, $y\geqslant -3$, $y-x\leqslant -3$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_G (2x+y)\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $y=6x$, $y=0$, $x=1$.

Вариант 5

1. Пользуясь определением, докажите что

$$\left(\sqrt{1+x^3+2x^4}-1\right)\cdot x=o(x^2)\quad \text{при } x\to 0.$$

2. Пусть система уравнений $A\vec{x}=0$, где A — квадратная матрица, имеет единственное решение $\vec{x}=0$. Докажите, что система уравнений $A\vec{x}=\vec{b}$ имеет решение при любой правой части.

3. Найдите координаты вектора $\vec{x}\ (2;2;-1)$ в базисе $\vec{e}_1\ (1;0;2)$, $\vec{e}_2\ (-1;2;1)$, $\vec{e}_3\ (-1;4;0)$. Сделайте проверку.

4. Найдите собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&2\\3&0&1\end{pmatrix},$$

соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{136}$ и составляющий тупой угол с осью Ox.

5. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей

$$\begin{pmatrix}2&1&5\\1&2&1\\1&1&a-3\end{pmatrix},$$

имеет ненулевое решение?

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2$ и $y=2x-x^2$.

7. Изобразите на плоскости область интегрирования и поменяйте порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x+1} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{1} f(x,y)\,dy.$$

8. Найдите наименьшее значение функции $z=x^2+y^2-6y$ в области, определяемой неравенствами $x\geqslant -4$, $y\leqslant 4$, $y-x\geqslant 4$.

9. При каких значения параметра a уравнение $4xyy''+2y'\sqrt{x}=-6$ имеет решение вида $y=a\sqrt{x}$?

10. Решите задачу Коши $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2x+1}{x^2}$, $y(-2)=0$. В ответе укажите положительное значение x, при котором $y=0$.

Вариант 6

1. Докажите что если $f(x)=f(2)+k(x-2)+o(x-2)$ при $x\to 2$, то функция $f(x)$ имеет производную при $x=2$.

2. Докажите, что если $\vec{v}$ — собственный вектор квадратной матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda=3$, и существует обратная матрица, то $\vec{v}$ является собственным вектором матрицы A^{-1}. Какому собственному значению обратной матрицы он соответствует?

3. Найдите координаты вектора $\vec{x}(4;1;3)$ в базисе $\vec{e}_1(2;0;1)$, $\vec{e}_2(1;1;2)$, $\vec{e}_3(2;1;3)$. Сделайте проверку.

4. Найдите собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{54}$ и составляющий тупой угол с осью Oz.

5. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+a & 2 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

имеет ненулевое решение?

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x^2 - 4x + 3$ и $y = 3 + 4x$.

7. Изобразите на плоскости область интегрирования и поменяйте порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\, dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{-y} f(x, y)\, dx.$$

8. Найдите наибольшее значение функции $z = x - y^2 + 4y$ в области, определяемой неравенствами $x \leqslant 3$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 0$.

9. При каких значения параметра a уравнение $x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ имеет решение вида $y = x^a$?

10. Решите задачу Коши $y' + xy = 2x$, $y(0) = 3$. В ответе укажите значение предела $\lim\limits_{x\to\infty} y$.

Вариант 7

1. Сформулируйте достаточное условие монотонного убывания функции $f(x)$. Докажите его, используя теорему Лагранжа для дифференцируемых функций.

2. Пусть вектор $\vec{v}$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_0$. Докажите, что $\vec{v}$ — собственный вектор матрицы $B = A^2 + 2A$. Какому собственному значению он соответствует?

3. Найдите координаты вектора $\vec{x}(2; 2; 3)$ в базисе $\vec{e}_1(1; 2; 3)$, $\vec{e}_2(2; 1; 2)$, $\vec{e}_3(3; 2; 4)$. Сделайте проверку.

4. Найдите собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{264}$ и составляющий тупой угол с осью Oy.

5. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2+a & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

имеет ненулевое решение?

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2-2x+2$ и $y=2+4x-x^2$.

7. Изобразите на плоскости область интегрирования и поменяйте порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx.$$

8. Найдите наименьшее значение функции $z=x^2-4x+y^2$ в области, определяемой неравенствами $x\leqslant 3$, $y\geqslant -3$, $y-x\leqslant -3$.

9. При каких значениях параметра k уравнение $y''+3y'-6y=8e^{2x}$ имеет решение вида $y=ke^{2x}$?

10. Решите задачу Коши $xy'-2y=2x^2$, $y(1)=-6$. В ответе укажите положительное значение x, при котором $y=0$.

Вариант 8

1. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$, то существует производная функции в этой точке.

2. Докажите, что если $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственному значению $\lambda=\lambda_0$, то их разность является собственным вектором матрицы A, соответствующим тому же собственному значению.

3. Найдите координаты вектора $\vec{x}(4;3;-2)$ в базисе $\vec{e}_1(1;1;2)$, $\vec{e}_2(-3;0;-2)$, $\vec{e}_3(1;2;-1)$. Сделайте проверку.

4. Найдите собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 15 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{99}$ и составляющий тупой угол с осью Ox.

5. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & a+6 & 5 \end{pmatrix},$$

имеет ненулевое решение?

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=3x-x^2$ и $y=-x$.

7. Изобразите на плоскости область интегрирования и поменяйте порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_0^{6-x} f(x,y)\,dy.$$

8. Найдите наименьшее значение функции $z=x^2+2x-y$ в области, определяемой неравенствами $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $y-x\leqslant 2$.

9. При каких значениях параметра a уравнение $x^2y''+2xy'-2y=0$ имеет решение вида $y=x^a$?

10. Решите задачу Коши $y'+x^2y=2xe^{-x^3/3}$, $y(0)=-9$. В ответе укажите положительное значение x, при котором $y=0$.

Ответы к главе 9

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. $\frac{4}{3}$. **2.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **3.** $a = 2$.

4. $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 12 & -16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. **5.** $-\begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 80$.

6. $(3; -3; -1)$ (пересечение $(1; -0{,}5; -0{,}5)$). **7.** $a = 3$.

Вариант 2

1. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1}{15}$. **2.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. $a = 12$. **4.** $X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$. **6.** $(1; 0; -1)$ (пересечение $(1{,}5; -0{,}5; 0)$). **7.** $a = 4$.

Вариант 3

1. $\frac{2}{3}$. **2.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **3.** $a = 3$.

4. $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **5.** $-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -16$.

6. $(0; -3; -2)$ (пересечение $(0{,}5; -1; -0{,}5)$). **7.** $a = 3$.

Вариант 4

1. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{7}{8}$. **2.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $a=-3$. **4.** $X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 4 & -4\\ 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix}4 & 0 & -4\\ 5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=24$.
6. $(-2; -3; -2)$ (пересечение $(-1{,}5; -1{,}5; -0{,}5)$). **7.** $a=2$.

Вариант 5

1. $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-11\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}110\\ 0\\ -40\\ 1\end{pmatrix}$. **2.** a — любое число. **3.** $a=2$.
4. $X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}$. **5.** $\frac{1}{5\sqrt{2}}$. **6.** $a=2$. **7.** 80.

Вариант 6

1. $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\ 0\\ -3\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}35\\ 0\\ -17\\ 1\end{pmatrix}$. **2.** $a\neq-6$. **3.** $a=12$.
4. $X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\\ 3 & -4\end{pmatrix}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **6.** $a=4$. **7.** -24.

Вариант 7

1. $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-20\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}13\\ 0\\ -11\\ 1\end{pmatrix}$. **2.** $a=2$. **3.** $a=3$.
4. $X=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ -3 & -5 & 1\end{pmatrix}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **6.** $a=-3$. **7.** 8.

Вариант 8

1. $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ 0\\ 3\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}22\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-68\\ 0\\ 7\\ 1\end{pmatrix}$. **2.** $a\neq5$. **3.** $a=-3$.
4. $X=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{17}}$. **6.** $a=-1$. **7.** -24.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. $f(0)=1$. **2.** $x'=\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$, $y'=\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}$, $y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$.

3. $y = x + 3$. **4.** $y' = 2 + \frac{16}{(x+5)^3}$, $x_{\max} = -7$, $y(-7) = -13$, $y'' = -\frac{48}{(x+5)^4}$.

5. 1,03. **6.** 2. **7.** $-\frac{1}{3}(2x+1)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x + C$.

Вариант 2

1. $f(0) = -1$. **2.** $x' = \frac{-1-2\ln t}{t^3}$, $y' = \frac{-1-2\ln t}{t^2}$, $y = 1\cdot(x-1)+3$.

3. $y = 4x - 7$. **4.** $y' = -4 - \frac{4}{(x-2)^5}$, $x_{\min} = 1$, $y(1) = -2$, $y'' = \frac{20}{(x-2)^6}$.

5. 1,985. **6.** 9. **7.** $\frac{1}{9}e^{3x}(6x+13) + C$.

Вариант 3

1 $f(0) = 2$. **2.** $x' = -\frac{1}{t^2}$, $y' = \frac{1}{t^2}$, $y = -1(x-0)+2$.

3. $y = -\frac{1}{3}(x-1)+1$, $y(2) = 2$, $y'' = \frac{324}{(x+1)^5}$.

4. $y' = 1 - \frac{81}{(x+1)^4}$, $x_{\max} = -4$, $y(-4) = -6$; $x_{\min} = 2$. **5.** 0,98. **6.** 2.

7. $\frac{1}{2}(3x-1)\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C$.

Вариант 4

1. $f(0) = -2$. **2.** $x' = -\frac{1}{(t+1)^2}$, $y' = \frac{2t}{(t+1)^3}$, $y = -2(x-2)+1$.

3. $y = -8(x-2)+1$. **4.** $y' = \frac{5}{(x-1)^6}$, $x_{\max} = 2$, $y(2) = -7$, $x_{\min} = 0$, $y(0) = 5$, $y'' = -\frac{30}{(x-1)^7}$. **5.** 1,06. **6.** 4. **7.** $(x+0{,}5)e^{2x} + C$.

Вариант 5

1. $x = 2$ — точка минимума, $x = 4$ — точка максимума.

2. $y = -2{,}5x + 13$, $(x_0; y_0) = (4; 3)$. **3.** $-\frac{1}{4}x^4 = -\frac{1}{64}$. **4.** $y = x$, $y' = \frac{x^3-8}{x^3}$.

5. $f'(-1)f'(1) = -4$. **6.** $t = 2 - x^2$, $\frac{1}{2}\int\limits_1^5 t^5 dt = \frac{63}{12}$.

7. $(x^2+3x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$.

Вариант 6

1. $x = -5$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума.

2. $y = 3x + 9$, $(x_0; y_0) = (-1; 6)$. **3.** $2x^2 = 0{,}5$.

4. $y = x$, $y' = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$. **5.** $f'(2)f'(1) = 12\cdot 3 = 36$.

6. $t = 25 - x^2$, $\frac{1}{2}\int\limits_9^{16}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 1$. **7.** $-\frac{1}{3}x\cos(3x+2) + \frac{1}{9}\sin(3x+2) + C$.

Вариант 7

1. $x=-2$ — точка минимума, $x=3$ — точка максимума.

2. $y=-x+2$, $(x_0, y_0)=(5,-3)$. **3.** $2x^6=\frac{1}{32}$. **4.** $y=x$, $y'=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$.

5. $f'(2)f'(1)=11\cdot 5=55$. **6.** $t=\sqrt{2x+1}$, $\int\limits_1^3 \frac{dt}{1+t}=\ln 2$.

7. $\frac{1}{2}xe^{2x+1}-\frac{1}{4}e^{2x+1}+C$.

Вариант 8

1. $x=-2$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума.

2. $y=-6x-22$, $(x_0; y_0)=(-4; 2)$.

3. $2x^4=\frac{1}{8}$. **4.** $y=x-3$, $y'=\frac{x^4+4x^3}{(x+1)^4}$. **5.** $f'(-1)f'(1)=-7$.

6. $t=\sqrt{x^2-1}$, $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{3}$. **7.** $\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

Зачетная контрольная работа

Вариант 1

1. $\{2; -1; -2\}$. **2.** $\lambda=4$, $\lambda=2$: $t_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. **3.** 2. **4.** $-\frac{4}{3}$.

5. $y=3x+1$.

6. $y'=2+\frac{16}{(x+5)^3}$, $x_{\max}=-7$, $y(-7)=-13$, $y''=-\frac{48}{(x+5)^4}$. **7.** 1,03.

Вариант 2

1. $\{-1, -3, 5\}$. **2.** $\lambda=5$, $\lambda=1$: $t_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$. **3.** 4. **4.** $-\frac{9}{2}$.

5. $y=-\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}$. **6.** $y'=1-\frac{81}{(x+1)^4}$, $x_{\max}=-4$, $y(-4)=-6$, $x_{\min}=2$, $y(2)=2$, $y''=\frac{324}{(x+1)^5}$. **7.** 1,985.

Вариант 3

1. $(-1, 4, 1\}$. **2.** $\lambda=3$, $\lambda=2$: $t_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. **3.** $\frac{1}{4}$. **4.** $\frac{2}{3}$.

5. $y=3x-2$. **6.** $y'=-4-\frac{4}{(x-2)^5}$, $x_{\min}=1$, $y(1)=-2$, $y''=\frac{20}{(x-2)^6}$.

7. 0,98.

Вариант 4

1. $\{2; -1; 3\}$. **2.** $\lambda=2$, $\lambda=3$: $t_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. **3.** $-\frac{1}{7}$. **4.** -7.

5. $y=\frac{1}{2}x+1$. **6.** $y'=\frac{5}{(x-1)^6}-5$, $x_{\max}=2$, $y(2)=-7$, $x_{\min}=0$, $y(0)=5$, $y''=-\frac{30}{(x-1)^7}$. **7.** 1,06.

Вариант 5

1. $x=-1$, $y=3$, $z=2$.

2. $\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\3&-2&0&-4\\2&2&1&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&-2&3&-14\\0&2&3&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&-2&3&-14\\0&0&6&0\end{pmatrix}$;

$c(-2; -5; 0{,}1)$. **3.** $\lambda=5$, $(1; -3)$, $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **4.** $-\frac{2}{7}$. **5.** $x=-\frac{1}{3}$.

6. $y=x+4$, $y'=\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$. **7.** $\frac{1}{9}e^{3x}(6x+13)+\frac{5}{9}$.

Вариант 6

1. $x=1$, $y=5$, $z=2$.

2. $\begin{pmatrix}-1&2&0&-3\\0&10&6&-12\\5&1&6&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0&-3\\0&10&6&-12\\0&11&6&-12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0&-3\\0&-1&0&0\\0&11&6&-12\end{pmatrix}\to$

$\to\begin{pmatrix}-1&2&0&-3\\0&-1&0&0\\0&0&6&-12\end{pmatrix}$; $c(-3; 0; 2; 1)$.

3. $\lambda=4$, $(3; -2)$, $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}}$. **4.** $-\frac{4}{9}$. **5.** $x=\frac{1}{3}$. **6.** $y'=\frac{8x}{(x+4)^3}$.

7. $\frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x+\frac{2}{9}\cos 3x+\frac{7}{9}$.

Вариант 7

1. $x=3$, $y=2$, $z=1$.

2. $\begin{pmatrix}-1&2&0&1\\0&-4&-2&3\\1&14&8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0&1\\0&-4&-2&3\\0&16&8&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&0&1\\0&-4&-2&3\\0&0&0&15\end{pmatrix}$;

$c\left(-1; -\frac{1}{2}; 1; 0\right)$. **3.** $\lambda=-3$, $(5; -4)$, $\cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{41}}$. **4.** $\frac{4}{3}$. **5.** $x=1$.

6. $y=-\frac{1}{3}x$, $y'=-\frac{x^3+27}{3x^3}$. **7.** $-\frac{1}{5}\ln(e-x^5)+\frac{1}{5}$.

Вариант 8

1. $x=1$, $y=1$, $z=1$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -8 \\ 0 & 8 & 1 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & -8 \end{pmatrix} \to$
$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}$; $c(-3; 0; 8; 1)$.

3. $\lambda = -2$, $(4; -3)$, $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}$. **4.** 3. **5.** $x = 1$. **6.** $y = 4x - 1$,
$y' = \dfrac{4x^2 + 8x + 3}{(x+1)^2} = \dfrac{(2x+3)(2x+1)}{(x+1)^2}$. **7.** $-\dfrac{1}{3}\exp(8 - x^3) + \dfrac{4}{3}$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. $k = a \cdot f'(x_0)$. **3.** $x_1 = 6 - 5t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$, $t = 1$, $(1; 0; 1)$.
4. $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. **5.** $a = 2$, $\lambda = 3$. **6.** $y = 3x - 2$.
7. $9\left(F\left(\dfrac{2}{9}\right) - F\left(\dfrac{1}{9}\right)\right)$. **8.** $(2; 1; 3)$ — точка максимума, $(-2; 1; 3)$ — нет экстремума. **9.** $z_{\min} = z(-0{,}5; 3{,}5) = -8{,}5$. **10.** 4.

Вариант 2

3. $x_1 = 2t + 3$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $t = -2$, $(-1; -2; 0)$.
4. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. **5.** $a = 3$, $\lambda = 3$. **6.** $y = -x + 2$.
7. $\dfrac{F(12) - F(4)}{4}$. **8.** $(-3; 1; 2)$ — точка минимума, $(3; 1; 2)$ — нет экстремума. **9.** $z_{\max} = z(3; 2) = 7$. **10.** 10.

Вариант 3

1. $2f'_x(1; 2) + 3f'_y(1; 2)$. **3.** $x_1 = 3t - 10$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $t = 3$, $(-1; 3; 0)$.
4. $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. **5.** $a = 3$, $\lambda = 5$.
6. $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$. **7.** $\dfrac{F(4\sqrt{3}) - F(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$.
8. $(1; -2; 7)$ — точка минимума, $(-1; -2; 7)$ — нет экстремума.
9. $z_{\min} = z(0; 2) = -2$. **10.** 4.

Вариант 4

1. $\sqrt{13}$. **3.** $x_1 = 2t + 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$, $t = -2$, $(1; 0; -2)$.

4. $X=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$. **5.** $a=4$, $\lambda=2$. **6.** $y=3x+1$.

7. $\sqrt{2}\left(F\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)-F\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right)$. **8.** $(-2; 0; 1)$ — точка максимума, $(2; 0; 1)$ — нет экстремума. **9.** $z_{\min}=z(2{,}5; -0{,}5)=-3{,}5$. **10.** 10.

Вариант 5

3. $(1; -3; 2)$. **4.** $\lambda=-2$, $\lambda=1$, $\lambda=4$, $t(3; 4; 3)$; $(-6; -8; -6)$.
5. $a=5$, $-3a+15=0$.

6. $\frac{1}{3}$. **7.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\,dx$. **8.** $z_{\min}=z(-0{,}5; 3{,}5)=-8{,}5$.

9. $a^2-a-6=0$, $a=3$, $a=-2$. **10.** $y=\frac{C}{x^2}$, $C'=2x+1$, $y=\frac{x^2+x-2}{x^2}$, $x=1$.

Вариант 6

3. $\vec{x}=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3$. **4.** $\lambda=1$, $\lambda=1$, $\lambda=5$, $t(1; 1; 2)$; $(-3; -3; -6)$.

5. $a=3$, $6a-18=0$. **6.** $\frac{64}{3}$. **7.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^3}^{-x} f(x, y)\,dy$.

8. $z_{\max}=z(3; 2)=7$. **9.** $a^2+5a-6=0$, $a=1$, $a=-6$.
10. $y=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$, $C'=2xe^{\frac{x^2}{2}}$, $y=e^{-\frac{x^2}{2}}+2$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=2$.

Вариант 7

3. $\vec{x}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3$. **4.** $\lambda=-2$, $\lambda=1$, $\lambda=6$, $t(5; 4; 5)$; $(-10; -8; -10)$.

5. $a=-4$, $5a+20=0$. **6.** 9. **7.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x, y)\,dy$.

8. $z_{\min}=z(2{,}5; -0{,}5)=-3{,}5$. **9.** $(4+6-6)k=8$, $k=2$.
10. $y=Cx^2$, $C'=\frac{2}{x}$, $y=x^2(\ln x^2-6)$, $x=e^3$.

Вариант 8

3. $\vec{x}=-\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$. **4.** $\lambda=-1$, $\lambda=2$, $\lambda=9$, $t(1; 1; 3)$; $(-3; -3; -9)$.

5. $a=2$. **6.** $\frac{32}{3}$. **7.** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{6-y} f(x, y)\,dx$. **8.** $z_{\min}=z(-0{,}5; 1{,}5)=-2{,}25$.

9. $a^2+a-2=0$, $a=1$, $a=-2$. **10.** $y=Ce^{-x^3/3}$, $C'=2x$, $y=(x^2-9)e^{-x^3/3}$, $x=3$.

Библиографический список

1. *Болгов В. А., Демидович Б. П., Ефимов А. В. и др.* Сборник задач по математике. М.: Наука, 1986.
2. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.
3. *Зимина О. В. и др.* Высшая математика. Решебник. М., 2001.
4. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2007.
5. *Самовол В. С.* Основы математического анализа для политологов. Ч. I, II. Учебное пособие. М.: ГУ-ВШЭ, 2001.
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / Под ред. В. И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2005.
7. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1—3 / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. М.: Физматлит, 2003.
8. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: РХД, 2000.
9. *Шипачев В. С.* Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

Оглавление

III. Функции нескольких переменных

Логвенков Сергей Алексеевич
Мышкис Петр Анатольевич
Самовол Владимир Симхович

сборник задач по высшей математике
учебное пособие для студентов социально-управленческих специальностей

Подписано в печать 15.11.2014 г. Формат 60×90 $^1\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 11. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.
